Correction des exercices non corrigés en classe :

**Exercice 2 :**

4 )

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{n+6} = 5^n \times 5^6$
   Or $5^6 = 25 \times 25 \times 25$
   or $25 \equiv 4(7)$ donc $5^6 \equiv 4(7) \times 4(7) \times 4(7)$ donc $5^6 \equiv 64(7)$
   donc $5^6 \equiv 1(7)$
   donc $5^{n+6} \equiv 5^n \times 1(7)$ donc $\boxed{5^{n+6} \equiv 5^n(7)}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n+6} = 2^n \times 2^6$
   Or $2^6 = 8 \times 8$
   or $8 \equiv 1(7)$
   donc $2^6 \equiv 1(7)$
   donc $2^{n+6} \equiv 2^n \times 1(7)$ donc $\boxed{2^{n+6} \equiv 2^n(7)}$
3. On a : $19 = 7 \times 2 + 5 \equiv 5(7)$ et $23 = 7 \times 3 + 5 \equiv 2(7)$
   $19^{52} \times 23^{41} \equiv 5^{52}(7) \times 2^{41}(7)$
   donc
   $19^{52} \times 23^{41} \equiv 5^{6\times8+4}(7) \times 2^{6\times6+5}(7)$
   donc
   $19^{52} \times 23^{41} \equiv 5^4(7) \times 2^5(7)$
   or $5^4 = 25 \times 25 \equiv 4(7) \times 4(7) \equiv 16(7) \equiv 2(7)$ et $2^5 = 8 \times 4 \equiv 1(7) \times 4 \equiv 4(7)$ donc
   $19^{52} \times 23^{41} \equiv 2(7) \times 4(7) \equiv 8(7) \equiv 1(7)$
   donc le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ est 1.

**Exercice 3 : ( Les critères de divisibilité )**

On note $n = a_p.10^p + a_{p-1}.10^{p-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k.10^k$

1. $10 \equiv 0(2)$
   donc $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $10^k \equiv 0(2)$
   donc $n \equiv a_0(2)$
   ➻ Si $2|n$ alors $a_0 \equiv 0(2)$ donc $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
   ➻ Si $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ alors $a_0 \equiv 0(2)$ donc $n \equiv 0(2)$ donc $2|n$
   Conclusion : $\boxed{2|n \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}}$
2. $10 \equiv 1(3)$
   donc $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $10^k \equiv 1(3)$
   donc $n \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k(3)$
   ➻ Si $3|n$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k \equiv 0(3)$ et $3|\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$
   ➻ Si $3|\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k \equiv 0(3)$ et donc $3|n$
   Conclusion : $\boxed{3|n \Leftrightarrow 3|\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k}$
3. $10 \equiv 1(9)$
   donc $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $10^k \equiv 1(9)$

donc $n \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k (9)$

➽ Si $9|n$ alors $\sum_{k=0}^{p} a_k \equiv 0(9)$ et $9|\sum_{k=0}^{p} a_k$

➽ Si $9|\sum_{k=0}^{p} a_k$ alors $\sum_{k=0}^{p} a_k \equiv 0(9)$ et donc $9|n$

Conclusion : $\boxed{9|n \Leftrightarrow 9|\sum_{k=0}^{p} a_k}$

4. $10 \equiv 2(4)$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ on a $10^k \equiv 0(4)$
   donc $n \equiv 10a_1 + a_0(4)$
   ➽ Si $4|n$ alors $4|10a_1 + a_0$
   ➽ Si $4|10a_1 + a_0$ alors $n \equiv 0(4)$ donc $4|n$
   Conclusion : $\boxed{4|n \Leftrightarrow 4|10a_1 + a_0}$
5. $10 \equiv 0(5)$
   donc $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $10^k \equiv 0(5)$
   donc $n \equiv a_0(5)$
   ➽ Si $5|n$ alors $a_0 \equiv 0(5)$ donc $a_0 \in \{0, 5\}$
   ➽ Si $a_0 \in \{0, 5\}$ alors $a_0 \equiv 0(5)$ donc $n \equiv 0(5)$ donc $5|n$
   Conclusion : $\boxed{5|n \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 5\}}$
6. $n - 21a_0 = \sum_{k=0}^{p} a_k.10^k - 21a_0 = \sum_{k=1}^{p} a_k.10^k - 20a_0 = 10\left(\sum_{k=1}^{p} a_k.10^{k-1} - 2a_0\right)$

   ➽ Si $7|n$ alors comme 10 et 7 sont premiers entre eux alors $7|\sum_{k=1}^{p} a_k.10^{k-1} - 2a_0$

   donc $7|(\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_3 a_2 a_1} - 2a_0)$

   ➽ Si $7|(\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_3 a_2 a_1} - 2a_0)$ alors $7|\sum_{k=1}^{p} a_k.10^{k-1} - 2a_0$

   donc $7|10\left(\sum_{k=1}^{p} a_k 10^{k-1} - 2a_0\right)$

   donc $7|\sum_{k=1}^{p} a_k.10^k - 20a_0$ donc $7|\sum_{k=1}^{p} a_k.10^k + a_0 - 21a_0$

   donc $7|\sum_{k=0}^{p} a_k.10^k$ donc $7|n$

   Conclusion : $\boxed{7|n \Leftrightarrow 7|(\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_3 a_2 a_1} - 2a_0)}$
7. (a) On sait que $10 \equiv -1(11)$
      ➽ Si $k$ est pair alors $10^k \equiv (-1)^k(11)$ donc $10^k \equiv 1(11)$
      ➽ Si $k$ est impair alors $10^k \equiv (-1)^k(11)$ donc $10^k \equiv -1(11)$

   (b) D'après la question précédente :
      Si $p$ est pair $n \equiv [(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_p) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{p-1})](11)$
      donc
      ➽ si $11|n$ alors $11|[(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_p) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{p-1})]$
      ➽ Si $11|[(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_p) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{p-1})]$ comme
      $n \equiv [(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_p) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{p-1})](11)$ alors $n \equiv 0(11)$ donc $11|n$
      Conclusion : Si $p$ est pair alors

$$\boxed{11|n \Leftrightarrow 11|[(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_p) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{p-1})]}$$

(c) D'après la question précédente :
Si $p$ est pair $n \equiv [(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{p-1}) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p)](11)$
donc
➽ si $11|n$ alors $11|[(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{p-1}) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p)]$
➽ Si $11|[(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{p-1}) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p)]$ comme
$n \equiv [(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{p-1}) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p)](11)$ alors $n \equiv 0(11)$ donc $11|n$
Conclusion : Si $p$ est impair alors

$$\boxed{11|n \Leftrightarrow 11|[(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{p-1}) - (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p)]}$$

8. ➽ Si $13|n$ alors $13|n + 39a_0$ donc $13|\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k.10^k + 40a_0$

donc $13|\left[10\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k.10^{k-1} + 4a_0\right)\right]$
Or 13 et 10 sont premiers entre eux donc
$13|\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k.10^{k-1} + 4a_0\right]$ donc $13|(\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_3 a_2 a_1} + 4a_0)$

➽ Si $13|(\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_3 a_2 a_1} + 4a_0)$ alors $13|\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k.10^{k-1} + 4a_0\right]$

donc $13|\left[10\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k.10^{k-1} + 4a_0\right)\right]$

donc $13|\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k.10^k + 40a_0$ donc $13|n + 39a_0$ donc $13|n$
Conclusion :

$$\boxed{13|n \Leftrightarrow 13|(\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_3 a_2 a_1} + 4a_0)}$$