

Chapitre 7

Les fonctions de références

I Rappels sur les fonctions

I1 Domaine de définition

I2 Les variations

I3 Parité

II Les fonctions de référence

II1 Fonctions affines

II2 Fonction carré

II3 Fonction inverse

II4 Fonction racine carrée

II5 Fonction cube

III Applications

III1 Etudier les variations

III2 Démontrer des inégalités

III3 Résolution d'équations

III4 Résoudre des inéquations

I Rappels sur les fonctions :

I.1 Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des x pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemples :

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

$f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $Df = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{3}{x+5}$

$g(x)$ existe si et seulement si $x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$

donc $Dg = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ ou $Dg =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{-2x+6}}$

$h(x)$ existe si et seulement si $\frac{4x+5}{-2x+6} \geq 0$

Il faut donc dresser le tableau de signe de $R(x) = \frac{4x+5}{-2x+6}$

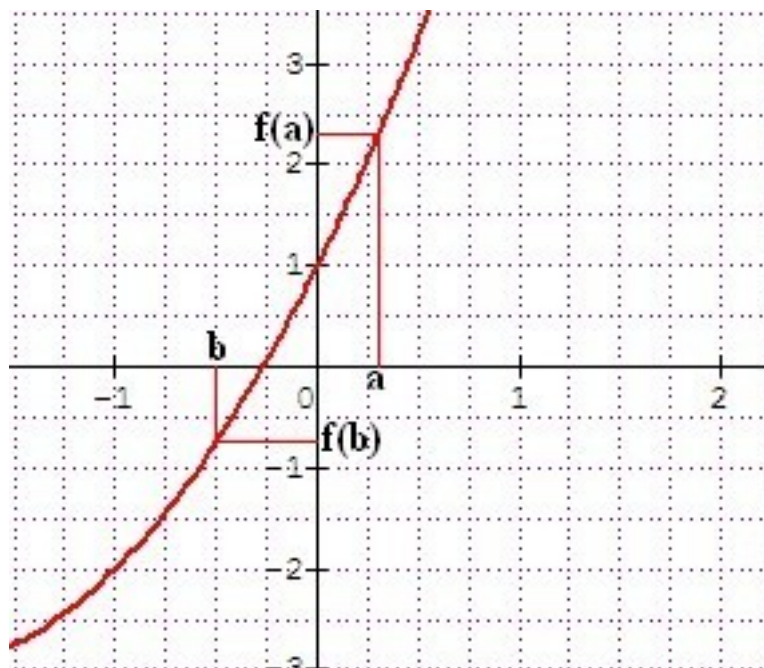
• $4x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -5/4$

• $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$ (Valeur interdite)

x	$-\infty$	$-5/4$	3	$+\infty$
$4x+5$	-	0	+	+
$-2x+6$	+	+	0	-
$R(x)$	-	0	+	-

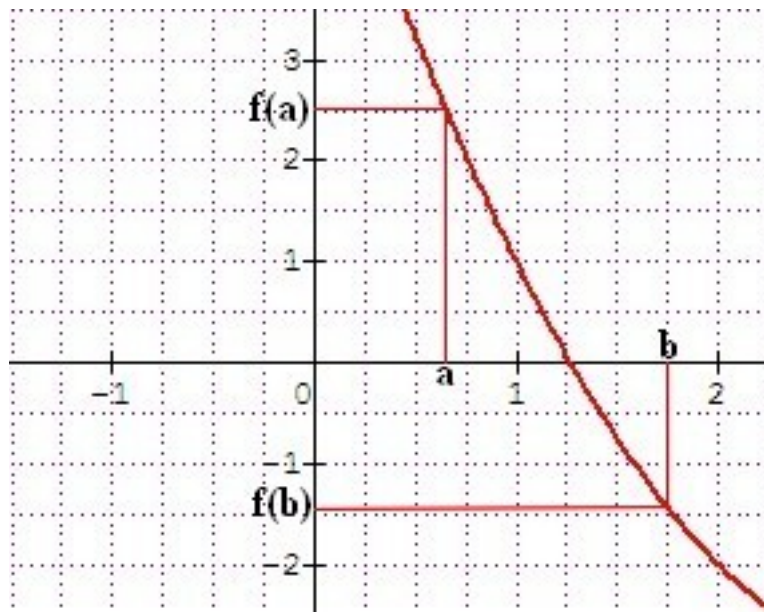
Donc $Dh = [-5/4 ; 3 [$

I.2 Les variations



Définition 1 :

- Si f est une fonction croissante sur I alors $\forall a \in I$ et $b \in I$ tels que $b \leq a$ on a $f(b) \leq f(a)$.
Une fonction f est croissante si et seulement si les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents.
- Remarque :
Si f est une fonction strictement croissante sur I alors $\forall a \in I$ et $b \in I$ tels que $b < a$ on a $f(b) < f(a)$.

**Définition 2 :**

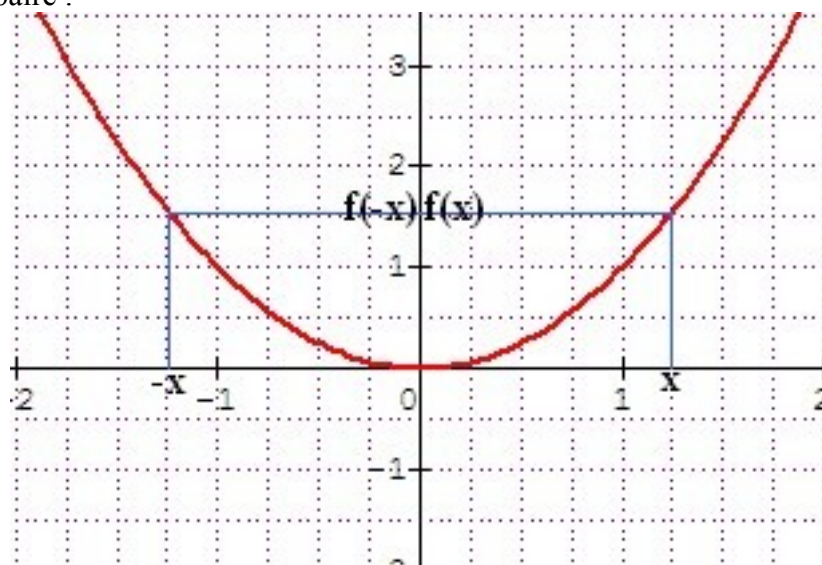
- Si f est une fonction décroissante sur I alors $\forall a \in I$ et $b \in I$ tels que $a \leq b$ on a $f(a) \geq f(b)$.
Une fonction f est croissante si et seulement si l'ordre des images est inversé par rapport à l'ordre des antécédents.
- Remarque :
Si f est une fonction strictement décroissante sur I alors $\forall a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$ on a $f(a) > f(b)$.

Définition 3 :

- Si f est une fonction constante sur I alors $\forall a \in I$ et $b \in I$ tels que $a \leq b$ on a $f(a) = f(b)$.
Une fonction f est constante si et seulement si les images sont identiques quelque soient les antécédents.

I.3 Parité

Fonction paire :



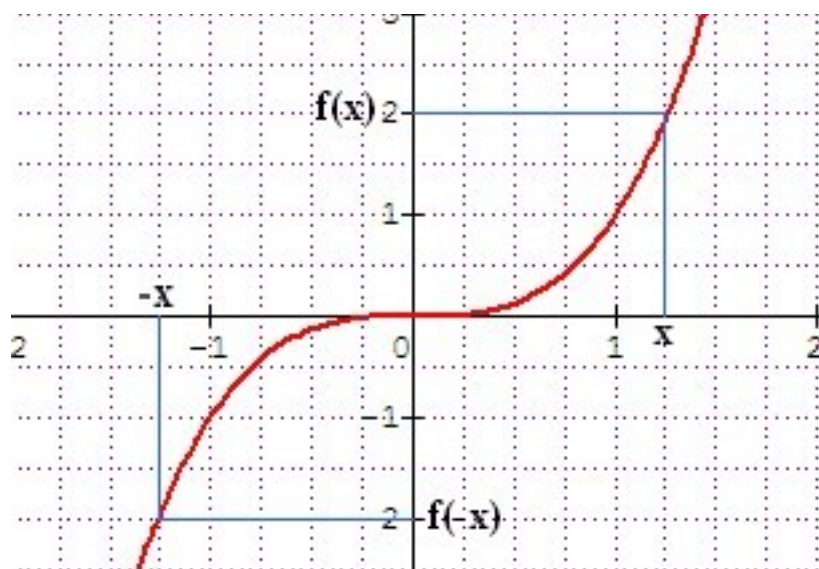
Définition :

f est paire si $\forall x \in D_f$ on a $f(-x) = f(x)$

Conséquence :

La courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à $(0, \vec{j})$

Fonction impaire :



Définition :

f est impaire si $\forall x \in Df$ on a $f(-x) = -f(x)$

Conséquence :

La courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à $O(0;0)$

II Etude des fonctions de références**II.1 Les fonctions affines****Définition :**

Les fonctions affines sont celles de la forme : $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Vocabulaire :

a se nomme **le coefficient directeur** de la droite représentant la fonction affine.

b se nomme **l'ordonnée à l'origine** de la droite représentant la fonction affine.

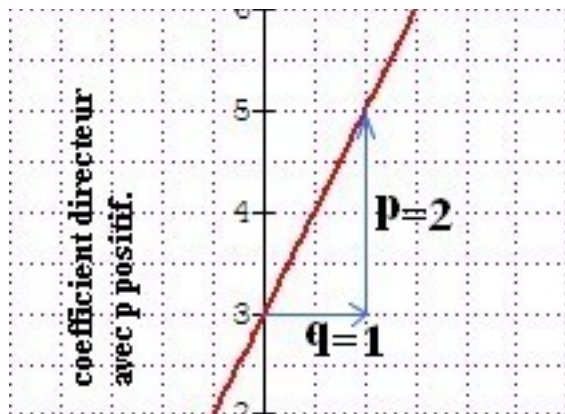
Conséquences :

Ces deux nombres nous donnent des indications pour tracer la représentation graphique des fonctions affines associées.

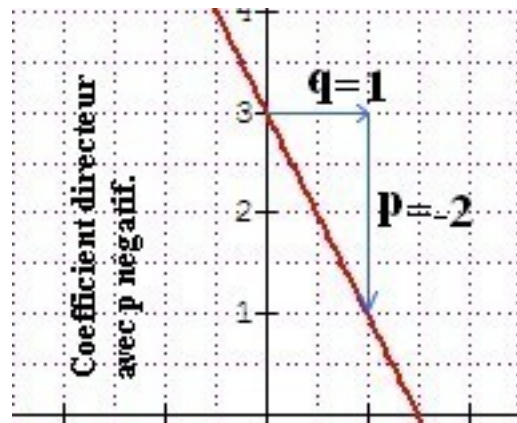
b étant l'ordonnée à l'origine alors la droite passe par le point $(0 ; b)$

Si on écrit a sous forme fractionnaire $\frac{p}{q}$ alors on peut représenter la pente de la droite en partant de l'ordonnée à l'origine, comme l'indiquent les schémas ci-dessous :

Courbe représentative de la fonction affine :
 $f(x) = 2x + 3$



Courbe représentative de la fonction affine :
 $f(x) = -2x + 3$

**Domaine de définition :**

Pour toutes les fonctions affines, le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Variations :

- Si a est positif ($a > 0$) alors la fonction $f: x \mapsto ax+b$ est strictement croissante.

Démonstration :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que $x < z$

$$\text{alors } f(x) - f(z) = (ax + b) - (az + b) = ax - az + b - b = a(x - z)$$

or $x < z$ donc $x - z < 0$ et comme $a > 0$ alors $f(x) - f(z) < 0$

donc $f(x) < f(z)$.

On peut donc conclure que les images sont dans le même ordre que les antécédents et donc que f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Si a est négatif ($a < 0$) alors la fonction $f: x \mapsto ax+b$ est strictement décroissante.

Démonstration : A faire par les élèves. Laisser 10 lignes ...

- Si a est nul ($a = 0$) alors la fonction $f: x \mapsto b$ est constante. Sa courbe représentative est une droite horizontale passant par l'ordonnée b .

Démonstration :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que $x < z$

$$\text{alors } f(x) - f(z) = (b) - (b) = 0$$

donc $f(x) = f(z)$.

On peut donc conclure que les images sont identiques quelque soient les antécédents et donc que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Parité :

- Si b est nul ($b = 0$) alors la fonction $f: x \mapsto ax$ est impaire.

Démonstration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = a(-x) = -ax = -f(x) \text{ donc } f \text{ est une fonction impaire.}$$

- Si b est non nul et a est nul ($a = 0$ et $b \neq 0$) alors f est paire.

Démonstration : A faire par les élèves. Laisser 4 lignes ...

- Si a et b sont non nuls ($b \neq 0$ et $a \neq 0$) et alors la fonction $f: x \mapsto ax + b$ est ni paire, ni impaire.

Démonstration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = a(-x) + b = -ax + b \text{ donc } f(-x) \neq f(x) \text{ et } f(-x) \neq -f(x)$$

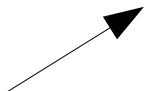
Conclusion :

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$

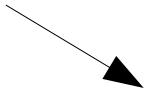
$$\bullet Df = \mathbb{R}$$

Variations :

- Si a est positif ($a > 0$) alors f est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

- Si a est négatif ($a < 0$) alors f est strictement décroissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

- Si a est nul ($a = 0$) alors f est constante.

Parité :

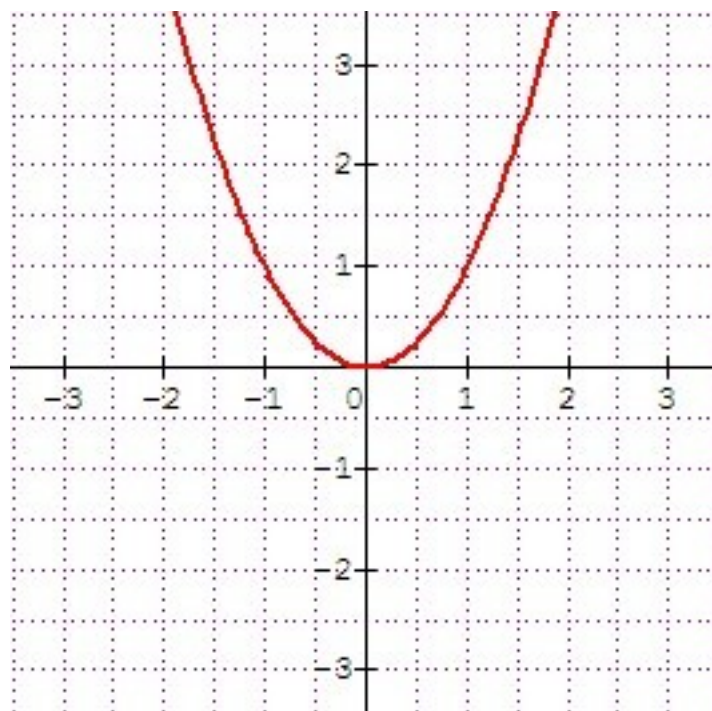
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors f est impaire.
- Si $b \neq 0$ et $a = 0$ alors f est paire.
- Si $b \neq 0$ et $a \neq 0$ alors f est ni paire ni impaire.

II.2 La fonction carré

Définition :

La fonction carré est la fonction $f: x \mapsto x^2$

La courbe représentative de la fonction carré est une **Parabole**



Domaine de définition :

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Variations :

- Sur $] - \infty ; 0]$ la fonction carré est décroissante.

Démonstration :

$\forall x \in] - \infty ; 0]$ et $\forall z \in] - \infty ; 0]$ tels que $x \leq z$

alors $f(x) - f(z) = x^2 - z^2 = (x - z)(x + z)$

Or $x \leq z$ donc $x - z \leq 0$ ($x - z$ est négatif ou nul)

De plus $x \in] - \infty ; 0] \Rightarrow x \leq 0$ et $z \in] - \infty ; 0] \Rightarrow z \leq 0$

d'où $x + z \leq 0$ ($x + z$ est négatif ou nul)

Conclusion : $f(x) - f(z) \geq 0$ et donc $f(x) \geq f(z)$

On peut donc conclure que l'ordre des images est inversé par rapport à l'ordre des antécédents et que la fonction carré est décroissante sur $] - \infty ; 0]$

- Sur $[0 ; + \infty [$ la fonction carré est croissante.

Démonstration : A faire par les élèves. Laisser 8 lignes ...

Parité :

La fonction carré est paire.

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Conclusion :

Soit f la fonction carré définie par $f(x) = x^2$

Sa courbe représentative est une Parabole.

Domaine de définition :

- $D_f = \mathbb{R}$

Variations :

- Sur $] - \infty ; 0]$ la fonction f est décroissante.
- Sur $[0 ; + \infty [$ la fonction f est croissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

Parité :

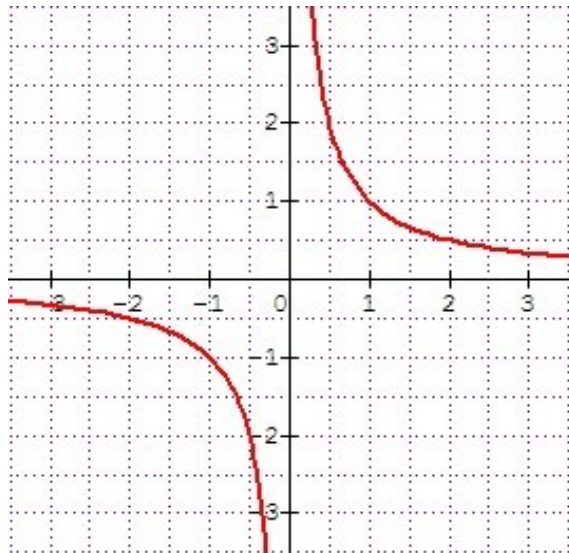
- la fonction f est paire.
Sa courbe représentative est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$

II.3 La fonction inverse

Définition :

La fonction carré est la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$

La courbe représentative de la fonction carré est une **Hyperbole**



Domaine de définition :

$f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$ donc $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$

Variations :

Sur $] -\infty ; 0 [$ et sur $] 0 ; +\infty [$ la fonction f est strictement décroissante.

Démonstration :

- Soient $x \in] -\infty ; 0 [$ et $z \in] -\infty ; 0 [$, tels que $x < z$

$$\text{alors } f(x) - f(z) = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z - x}{zx}$$

Or $x < z \Leftrightarrow z - x > 0$ (positif)

De plus $x < 0$ et $z < 0$ donc $xz > 0$ (positif)

donc $f(x) - f(z) > 0$ d'où $f(x) > f(z)$

Conclusion : l'ordre des images est inversé par rapport à l'ordre des antécédents et donc la fonction est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0 [$

- Pour $] 0 ; +\infty [$ c'est la même démonstration car $x > 0$ et $y > 0 \Rightarrow xz > 0$

Parité :

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x) \quad \text{donc } f \text{ est une fonction impaire}$$

et sa courbe représentative est symétrique par rapport à $O(0;0)$

Conclusion :

Soit f la fonction inverse définie par $f(x) = \frac{1}{x}$

Sa courbe représentative est une Hyperbole.

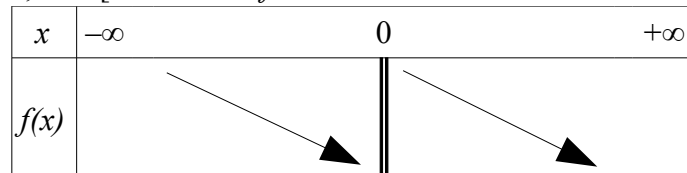
Domaine de définition :

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Variations :

- Sur $] -\infty ; 0 [$ la fonction f est strictement décroissante.
- Sur $] 0 ; +\infty [$ la fonction f est strictement décroissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			



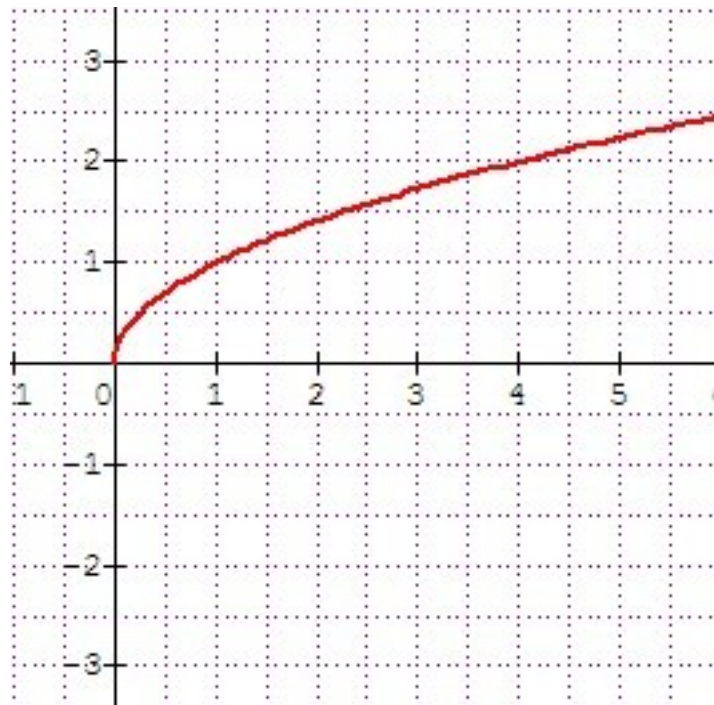
Parité :

- la fonction f est impaire.

Sa courbe représentative est symétrique par rapport à $O(0;0)$

II.4 La fonction racine carrée**Définition :**

La fonction racine carrée est la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$

**Domaine de définition :**

$f(x)$ existe si et seulement si $x \geq 0$ donc $D_f = [0 ; +\infty [$

Variations :

- Sur D_f la fonction f est strictement croissante.

Démonstration :

Soient $x \in]0 ; +\infty [$ et $z \in]0 ; +\infty [$ tels que $x < z$

$$\text{alors } f(x) - f(z) = \sqrt{x} - \sqrt{z} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{z})}{\sqrt{x} + \sqrt{z}} = \frac{x - z}{\sqrt{x} + \sqrt{z}}$$

Or $x < z$ donc $x - z < 0$ (Négatif)

Le résultat d'une racine carrée étant toujours positif, $\sqrt{x} + \sqrt{z} > 0$ (Positif)

donc $f(x) - f(z) < 0$ et $f(x) < f(z)$

On peut donc conclure que les images sont dans le même ordre que les antécédents et donc que f est une fonction strictement croissante sur $]0 ; +\infty [$.

Parité :

- La fonction racine carrée n'est ni paire, ni impaire.

Démonstration :

Si $x \in D_f$, alors $-x \notin D_f$ donc la fonction ne peut pas être paire ou impaire.

Conclusion :

Soit f la fonction racine carrée définie par $f(x) = \sqrt{x}$

Domaine de définition : $D_f =]0 ; +\infty [$

Variations : Sur D_f la fonction f est strictement croissante.

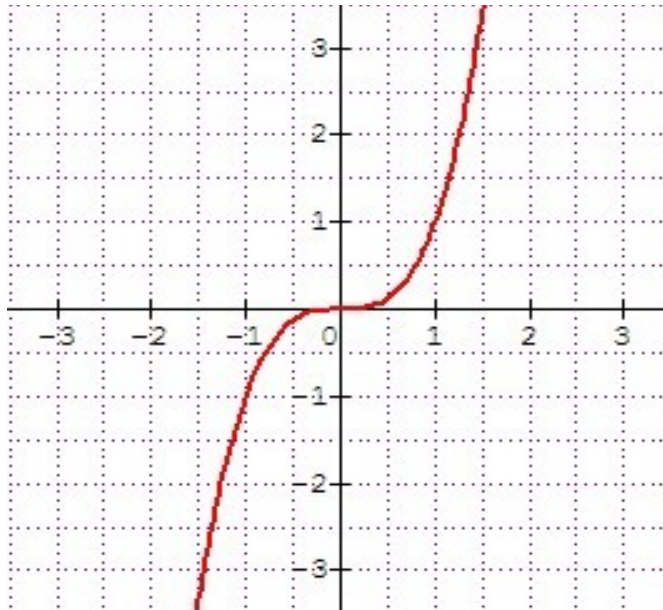
x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	



Parité : La fonction racine carrée n'est ni paire, ni impaire.

II.5 La fonction cube**Définition :**

La fonction cube est la fonction $f: x \mapsto x^3$

**Domaine de définition :**

$f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $Df = \mathbb{R}$

Variations :

- Sur Df la fonction cube est strictement croissante.

Démonstration :

A faire par les élèves ...

- 1) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$ on a

$$x^3 - z^3 = (x - z)(x^2 + xz + z^2) = (x - z) \left[\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3z^2}{4} \right]$$

- 2) Démontrer que f est strictement croissante sur Df .

Parité :

La fonction cube est une fonction impaire.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Conclusion :

Soit f la fonction cube définie par $f(x) = x^3$

Domaine de définition : $Df = \mathbb{R}$

Variations : f est strictement croissante sur Df .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Parité : f est une fonction impaire et donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à $O(0;0)$

III Applications

III.1 Etudier des variations

Exemple : On note $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{x^3}}$

La fonction f est une succession de fonctions de référence :

$$x \xrightarrow[1]{} x^3 \xrightarrow[2]{} \sqrt{x^3} \xrightarrow[3]{} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \xrightarrow[4]{} \frac{-3}{\sqrt{x^3}}$$

La fonction 1 est la fonction $g(x) = x^3$

La fonction 2 est la fonction $h(x) = \sqrt{x}$

La fonction 3 est la fonction $w(x) = \frac{1}{x}$

La fonction 4 est la fonction $v(x) = -3x$

Démontrons que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$:

Soient a et b deux nombres de $]0 ; +\infty[$ tels que

$$a < b$$

La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors

$$a^3 < b^3$$

La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ alors

$$\sqrt{a^3} < \sqrt{b^3}$$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ alors

$$\frac{1}{\sqrt{b^3}} < \frac{1}{\sqrt{a^3}}$$

La fonction affine $v(x) = -3x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors

$$\frac{-3}{\sqrt{a^3}} < \frac{-3}{\sqrt{b^3}}$$

Donc $f(a) < f(b)$ donc les antécédents et les images ont le même ordre.

Conclusion : **f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$**

III.1 Démontrer des inégalités

Rappels du collège :

- Si on ajoute (ou soustrait) un nombre réel dans chaque membre d'une inégalité alors celle-ci ne change pas de sens :

$$\forall c \in \mathbb{R} \text{ si } a \leq b \text{ alors } a + c \leq b + c$$

$$\forall c \in \mathbb{R} \text{ si } a \leq b \text{ alors } a - c \leq b - c$$

- Si on multiplie (ou divise) chaque membre d'une inégalité, par un nombre réel positif alors celle-ci ne change pas de sens :

$$\forall c \in [0 ; +\infty[\text{ si } a \leq b \text{ alors } a \times c \leq b \times c$$

$$\forall c \in [0 ; +\infty[\text{ si } a \leq b \text{ alors } a : c \leq b : c$$

- Si on multiplie (ou divise) chaque membre d'une inégalité, par un nombre réel négatif alors celle-ci change de sens :

$$\forall c \in]-\infty ; 0] \text{ si } a \leq b \text{ alors } a \times c \geq b \times c$$

$$\forall c \in]-\infty ; 0] \text{ si } a \leq b \text{ alors } a : c \geq b : c$$

Exemple 1 : On note $f(x) = \frac{2-x}{2}$

Si $x \in [-1 ; 3]$, montrer que $f(x) \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$$x \in [-1 ; 3] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -1 - 2 \leq x - 2 \leq 3 - 2$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x - 2 \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{-2} \geq \frac{x-2}{-2} \geq \frac{1}{-2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \geq \frac{2-x}{2} \geq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{2-x}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

Exemple 2 :

Si $x \in [1 ; 2]$ montrer que $\sqrt{x^2-1} \in [0; \sqrt{3}]$

Démonstration :

$$x \in [1 ; 2] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

or sur $[1 ; 2]$ la fonction carré est croissante donc

$$1^2 \leq x^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1-1 \leq x^2-1 \leq 4-1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2-1 \leq 3$$

or sur $[0 ; 3]$ la fonction racine carrée est croissante donc

$$\sqrt{0} \leq \sqrt{x^2-1} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x^2-1} \leq \sqrt{3}$$

$$\text{donc } \sqrt{x^2-1} \in [0; \sqrt{3}]$$

Exemple 3 :

Si $x \in [-1 ; 2]$ montrer que $-\frac{8}{x+2} \in [-8; -2]$

Démonstration :

$$x \in [-1 ; 2] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -1 + 2 \leq x + 2 \leq 2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x + 2 \leq 4$$

Or sur $[1 ; 4]$ la fonction inverse est strictement décroissante donc

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+2} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{8}{1} \leq -\frac{8}{x+2} \leq -\frac{8}{4} \Leftrightarrow -8 \leq -\frac{8}{x+2} \leq -2$$

donc $-\frac{8}{x+2} \in [-8; -2]$

III.2 Résolution graphique de certaines équations.

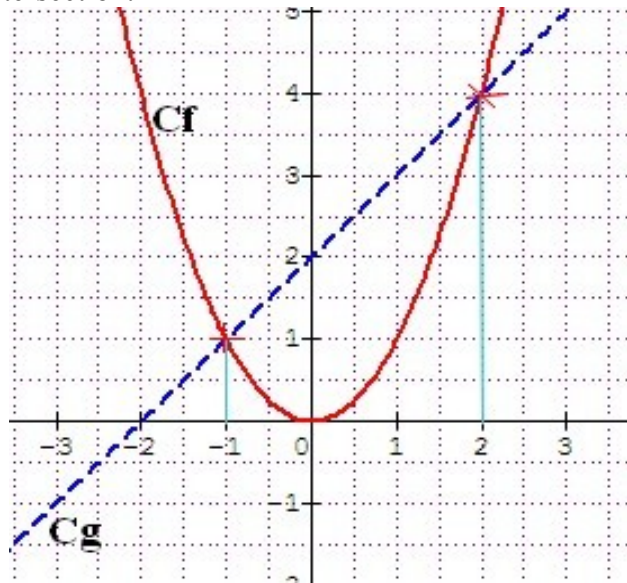
Exemple 1 :

Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = x + 2$

On note f la fonction $x \mapsto x^2$ et g la fonction $x \mapsto x+2$

f est la fonction carré et g est une fonction affine.

On trace dans un repère les courbes représentatives de f et g et on regarde s'il y a des points d'intersection. Les solutions de l'équation sont les abscisses de ces points d'intersection.



Donc $S = \{ -1 ; 2 \}$

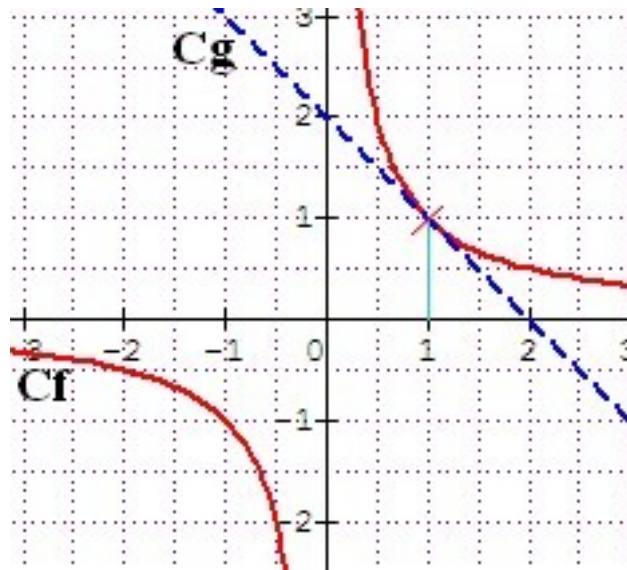
Exemple 2 :

Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\frac{1}{x} = x - 2$

On note f la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et g la fonction $x \mapsto x - 2$

f est la fonction inverse et g est une fonction affine.

On trace dans un repère les courbes représentatives de f et g et on regarde s'il y a des points d'intersection. Les solutions de l'équation sont les abscisses de ces points d'intersection.



Donc $S = \{1\}$

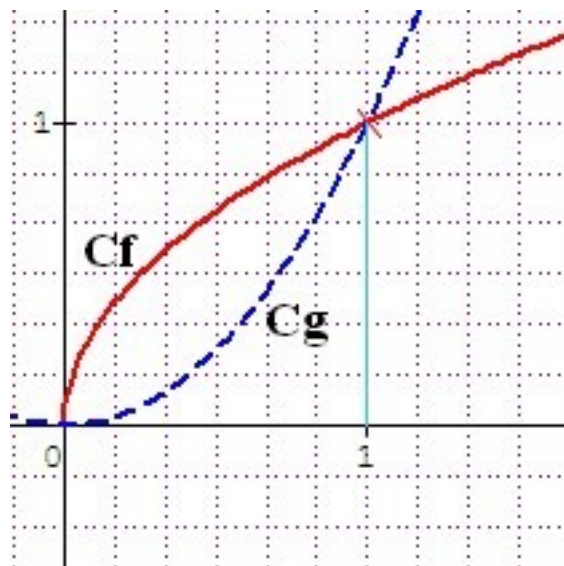
Exemple 3 :

Résoudre graphiquement, dans $[0; +\infty[$, l'équation $\sqrt{x} = x^2$

On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et g la fonction $x \mapsto x^2$

f est la fonction racine carrée et g est la fonction carré.

On trace dans un repère les courbes représentatives de f et g et on regarde s'il y a des points d'intersection. Les solutions de l'équation sont les abscisses de ces points d'intersection.



Donc $S = \{1\}$

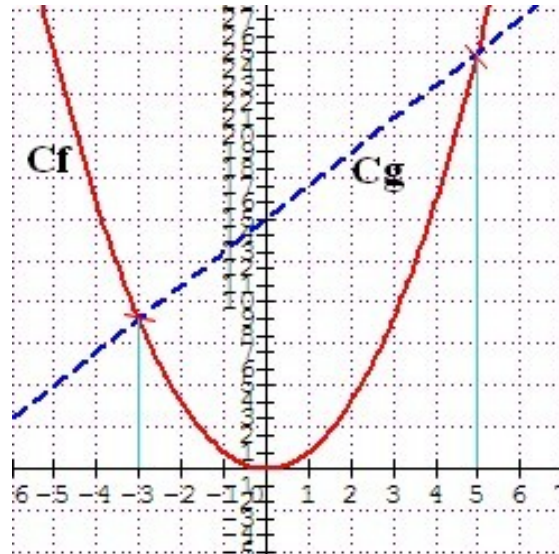
Exemple 4 :

Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2x + 15$$

On note f la fonction $x \mapsto x^2$ et g la fonction $x \mapsto 2x+15$
 f est la fonction carré et g est une fonction affine.

On trace dans un repère les courbes représentatives de f et g et on regarde s'il y a des points d'intersection. Les solutions de l'équation sont les abscisses de ces points d'intersection.



Donc $S = \{ -3 ; 5 \}$

III.3 Résolution graphique de certaines équations.

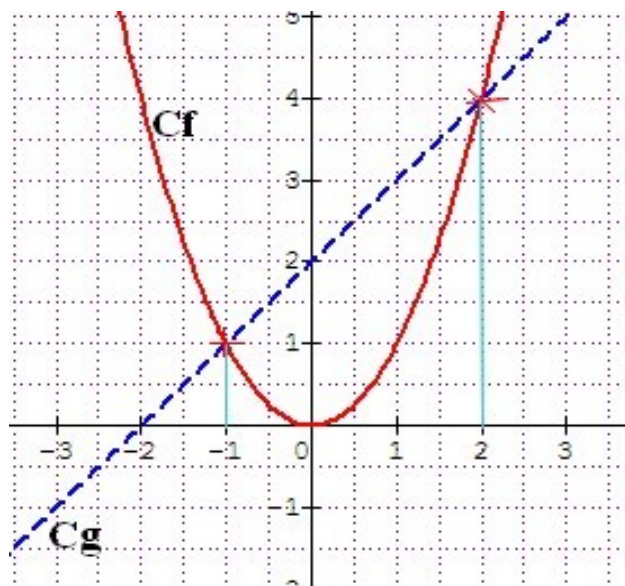
Exemple :

Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 \geq x + 2$

On note f la fonction $x \mapsto x^2$ et g la fonction $x \mapsto x+2$

f est la fonction carré et g est une fonction affine.

On trace dans un repère les courbes représentatives de f et g et on regarde à quels endroits la courbe représentant la fonction carré est au-dessus de celle représentant la fonction affine. Les solutions de l'équation sont les abscisses de ces points.



Donc $S =] -\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty [$

