

**Exercice 1:**

1. L'image de  $-2$  est  $1$  par la fonction  $f$   
L'image de  $3$  est  $3$  par la fonction  $f$ .
2. L'antécédent de  $3$  par la fonction  $f$  est  $3$   
Les antécédents de  $-2$  par la fonction  $f$  sont  $-3$  ;  $2$  et  $4$
3.  $f(x) = -1 \Leftrightarrow S = \{-1; 1; 5\}$   
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow S = \{-6; -1, 5; 1, 2; 4, 7\}$
4.  $f(5) = -1$   
 $f(-3) = 2$
5.  $f(x) > -1 \Leftrightarrow S = [-6; -1[ \cup ]1; 5[$
6. Tableau de signe de la fonction  $f$  :

|        |      |         |        |        |     |
|--------|------|---------|--------|--------|-----|
| $x$    | $-6$ | $-1, 5$ | $1, 5$ | $4, 7$ | $6$ |
| $f(x)$ | $0$  | $+$     | $0$    | $-$    | $0$ |

7. Tableau des variations de la fonction  $f$  :

|        |      |            |            |            |            |
|--------|------|------------|------------|------------|------------|
| $x$    | $-6$ | $-3$       | $0$        | $3$        | $6$        |
| $f(x)$ | $0$  | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |
|        |      | $2$        | $-3$       | $3$        | $-4$       |

**Exercice 2:**

On note la fonction  $g : x \mapsto 3(2x + 5)^2 - 4$  définie sur  $\mathbb{R}$

1.  $D_f = \mathbb{R}$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = 3\left(2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 5\right)^2 - 4 = 3 \times 0 - 4 = -4 \text{ donc } f\left(-\frac{5}{2}\right) = -4$$

$$f(x) - f\left(-\frac{5}{2}\right) = f(x) + 4 = 3(2x + 5)^2$$

or un carré est toujours positif donc  $f(x) - f\left(-\frac{5}{2}\right) \geq 0$  donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a  $f(x) \geq f\left(-\frac{5}{2}\right)$ .

On peut donc en conclure que  $-4$  est le minimum de  $f$  pour  $x = -\frac{5}{2}$

2.  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$  on a  $f(a) - f(b) = [3(2a + 5)^2 - 4] - [3(2b + 5)^2 - 4]$   
 $= 3(2a + 5)^2 - 3(2b + 5)^2$   
 $= 3(2a + 5 + 2b + 5)(2a + 5 - 2b - 5) = 3(2a + 2b + 10)(2a - 2b)$   
 $= 3 \times 2(a + b + 5) \times 2(a - b) = 12(a + b + 5)(a - b)$   
donc  $f(a) - f(b) = 12(a + b + 5)(a - b)$

3. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres inférieurs à  $-\frac{5}{2}$  tels que  $a < b$ .

Etudions le signe de  $f(a) - f(b)$  :

► On sait que  $a < b$  donc  $a - b < 0$

► On sait que  $a < -\frac{5}{2}$  et  $b \leq -\frac{5}{2}$  alors  $a + b < -5$  donc  $a + b + 5 < 0$

Donc  $f(a) - f(b) > 0$  d'où  $f(a) > f(b)$

$f$  est donc strictement décroissante sur  $\left]-\infty; -\frac{5}{2}\right]$

4. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres supérieurs à  $-\frac{5}{2}$  tels que  $a < b$ .

Etudions le signe de  $f(a) - f(b)$  :

► On sait que  $a < b$  donc  $a - b < 0$

► On sait que  $a \geq -\frac{5}{2}$  et  $b > -\frac{5}{2}$  alors  $a + b > -5$  donc  $a + b + 5 > 0$

Donc  $f(a) - f(b) < 0$  d'où  $f(a) < f(b)$

$f$  est donc strictement décroissante sur  $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$

5. Tableau des variations de  $f$ :

|        |           |                |           |
|--------|-----------|----------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | $-4$           |           |

$\searrow$                        $\nearrow$

6. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de  $f$  que l'on nomme  $\mathcal{C}_f$

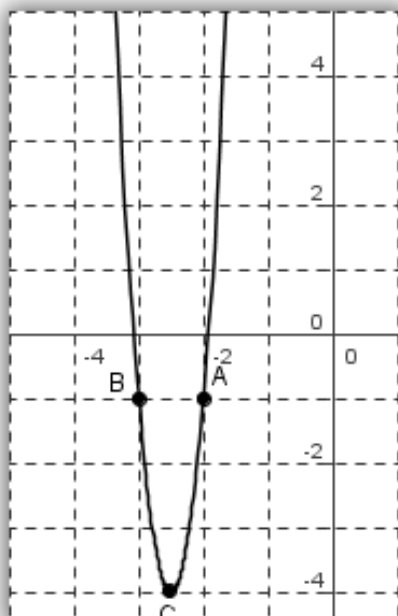


Figure 1

#### Exercice 4:

1. Ensemble de définition :

$$g(x) \text{ existe si et seulement si } x^3 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Donc  $D_g = \mathbb{R}^*$  et est symétrique par rapport à 0.

Etude de  $g(-x)$  :

$$g(-x) = -\frac{4(-x)^5 - 12(-x)}{(-x)^3 - x} = -\frac{-4x^5 + 2x}{-x^3 - x} = -\frac{-(4x^5 - 2x)}{-(x^3 + x)} = -\frac{4x^5 - 2x}{x^3 + x} = g(x)$$

donc  $g$  est paire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées  $(O; \vec{j})$ .

2.  $h(x)$  existe si et seulement si  $(3x^2 + 20)(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$  ou  $x \neq -1$

donc  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

3. Il faut résoudre  $\sqrt{7-x} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{7-x})^2 = 2^2 \Leftrightarrow 7-x = 4 \Leftrightarrow x = 3$

donc l'antécédent de 2 par la fonction  $p$  est 3.

4. Dresser le tableau de signe de la fonction  $q : x \mapsto -3|5 - 4x|$

$5 - 4x$  s'annule en  $x = \frac{5}{4}$

Une valeur absolue est toujours positive donc  $-3|5 - 4x|$  est toujours négative donc son tableau de signe est :

|        |           |               |           |
|--------|-----------|---------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\frac{5}{4}$ | $+\infty$ |
| $q(x)$ |           | 0             |           |

$-$                        $-$