

Correction de l'exercice 32 de la fiche de G.Costantini, téléchargeable à l'adresse :
http://perso.orange.fr/gilles.costantini/Lycees_fichiers/CoursS_fichiers/ex-fonctions.pdf

Exercice :

1. Question préliminaire

- Etude du signe de $-2x(x - 400)$

$$\Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow x - 400 = 0 \Leftrightarrow x = 400$$

Dressons le tableau de signe de $A = -2x(x - 400)$

x	$-\infty$	0	400	$+\infty$	
$-2x$		+	0	-	
$x - 400$	-	0	-	+	
A	-	0	+	0	-

- Il y avait une erreur d'énoncé : Il fallait étudier le signe de $-2x(x - 200)$

$$\Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow x - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 200$$

Dressons le tableau de signe de $A = -2x(x - 200)$

x	$-\infty$	0	200	$+\infty$	
$-2x$		+	0	-	
$x - 200$	-	0	-	+	
A	-	0	+	0	-

- D'après le tableau précédent, les solutions sur $\mathbb{R}$, de l'inéquation $-2x^2 + 400x = -2x(x - 200) \geq 0$ sont :

$$S = [0; 200]$$

2. Expressions de l'aire de la zone de baignade

- a. Si $x = 50$ m alors $y = 400 - 2 \times x = 400 - 2 \times 50 = 400 - 100 = 300$ m
donc l'aire de la zone de baignade est : $A = x \times y = 50 \times 300 = 15000 \text{ m}^2$
donc $A = 15000 \text{ m}^2$

- b. Puisque la longueur du cordon est de 400 m alors $y = 400 - 2x$

- c. $A(x) = x \times y = x \times (400 - 2x) = -2x^2 + 400x$ donc $A(x) = -2x^2 + 400x$

- d. $\forall x \in [0; 200]$ on a :
 $20000 - 2(x - 100)^2 = 20000 - 2(x^2 - 200x + 10000)$
 $= 20000 - 2x^2 + 400x - 20000 = -2x^2 + 400x = A(x)$
donc $A(x) = 20000 - 2(x - 100)^2$

3. Quelques calculs et recherche de l'aire maximale

- a. Si $A(x) = 22000$ alors $20000 - 2(x - 100)^2 = 22000 \Leftrightarrow -2(x - 100)^2 = 2000$
Or $\forall x \in [0; 200]$, $-2(x - 100)^2$ est négatif et donc ne peut pas être égal à 2000.
On ne peut donc pas obtenir une aire de 22000.

- b. $A(100) = 20000 - 2(100 - 100)^2 = 20000$
 $A(x) - A(100) = [20000 - 2(x - 100)^2] - (20000) = -2(x - 100)^2$
Or $\forall x \in [0; 200]$, $-2(x - 100)^2$ est toujours négatif
donc $\forall x \in [0; 200]$, $A(x) - A(100) \leq 0 \Leftrightarrow A(x) \leq A(100)$
donc $A(100) = 20000$ est le maximum de A pour $x = 100$.

Si $x = 100$ m alors $y = 400 - 2 \times x = 400 - 200 = 200$ m.

Donc l'aire est maximale si $x = 100$ m et $y = 200$ m.

4. Question de recherche

Le périmètre du demi-cercle d_p est donné par la formule : $d_p = \pi R$ donc $R = \frac{d_p}{\pi} = \frac{400}{\pi}$.

Alors $A = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{400}{\pi} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{400^2}{\pi} = \frac{80000}{\pi} = 25464,79089 \text{ m}^2$ donc $A = 25464,79089 \text{ m}^2$