

Exercice 1 :

Soient A , B et C trois points distincts du plan.

1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} \text{ donc } \boxed{\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}}$$

2. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

On place E sachant que $ABEC$ est un parallélogramme.

3. On sait que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CE}$ donc $ECAB$ est un parallélogramme.

4. Démontrer que pour tout point M du plan, on a

$$\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DA}$$

or $\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DA} = \vec{0}$ d'après la question 1)

$$\text{donc } \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MD}$$

5. On note O le centre du parallélogramme.

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}$$

or O est le milieu de $[AE]$ donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$

$$\text{donc } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CO}$$

Exercice 2 :

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On note $A(-5; 4)$, $B(-3; -5)$ et $C(1; -1)$

1. $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-7 + 1)^2} = \sqrt{73}$.

2. $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ +3 \end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JC}$ donc J est le milieu de $[AC]$
 $J \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right)$ donc $J \left(-1; \frac{1}{2} \right)$

4. $ACIB$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BI}$ donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}$

Donc $\begin{cases} x_I = (x_C - x_A) + x_B = -3 - 1 - 2 = -6 \\ y_I = (y_C - y_A) + y_B = 2 + 1 + 7 = 10 \end{cases}$ donc $I(-6; 10)$

5. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA}$ donc
 $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{i} + 15\vec{j} + \overrightarrow{OA} = -1\vec{i} + 11\vec{j} + \vec{i} - \vec{j} = 10\vec{j}$

6. $\vec{u} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -8 \\ +10 \end{pmatrix}$

or $-7 \times (10) - (-8) \times (-3) = -70 - 24 = -94 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 3 :

Soient a et b deux nombres de $] -\infty; 5[$ tels que $\boxed{a < b}$

$x \mapsto x - 5$ ($1 > 0$) est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $a - 5 < b - 5$

de plus $a < 5$ et $b < 5$ donc $a - 5 < 0$ et $b - 5 < 0$. Ils appartiennent donc à $\mathbb{R}^{-*}$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc $\frac{1}{a-5} > \frac{1}{b-5}$

$x \mapsto 7 - 3x$ ($-3 < 0$) est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $7 - \frac{3}{a-5} < 7 - \frac{3}{b-5}$

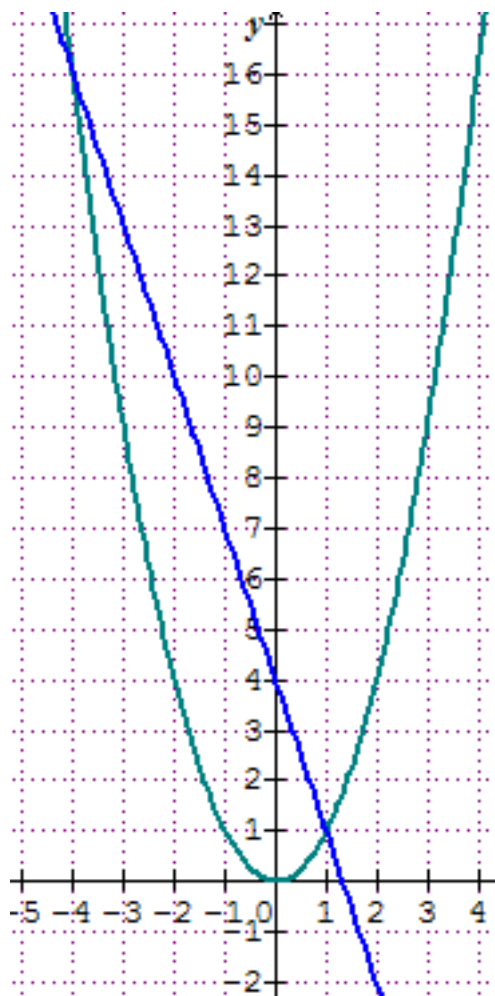
donc $\boxed{f(a) < f(b)}$ et f est donc strictement croissante sur $] -\infty; 5[$.

Exercice 4 :

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3x + 4$$

On trace donc la fonction carré $x \mapsto x^2$ et la fonction affine $x \mapsto 3x + 4$

On obtient $S = \{-3; 1\}$

**Exercice 5 :**

On sait que $1 < x < 2$ et $1 \in \mathbb{R}^+$, $2 \in \mathbb{R}^+$ donc $x \in \mathbb{R}^+$

or $x \mapsto x^2$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $1 < x^2 < 4$

or $x \mapsto x + 8$ est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $9 < x^2 + 8 < 12$

$0 \in \mathbb{R}^+$, $3 \in \mathbb{R}^+$ et donc $x^2 - 1 \in \mathbb{R}^+$

or $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $3 < \sqrt{x^2 + 8} < \sqrt{12}$

or $x \mapsto -x$ est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $-3 > -\sqrt{x^2 + 8} > -2\sqrt{3}$

donc $-\sqrt{x^2 + 8} \in]-2\sqrt{3}; -3[$

Exercice bonus : pour ceux qui ont terminé !

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n^2 < n^2 + 14n < n^2 + 5 + 14n + 49$

donc $n^2 < n^2 + 14n < (n + 7)^2$

or $n^2 \in \mathbb{R}^+$, $(n + 7)^2 \in \mathbb{R}^+$ donc $n^2 + 14n \in \mathbb{R}^+$

et $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2 + 14n} < \sqrt{(n + 7)^2}$ donc $n < \sqrt{n^2 + 14n} < n + 7$

or $x \mapsto x - 1$ est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $n - 1 < \sqrt{n^2 + 14n} - 1 < n + 6$