

Module 8 : Les expressions littérales (Partie 02)

Comment démontrer une égalité ?

Méthode :

On souhaite démontrer que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 3(2x+5)(3x-1) = 18 \left[\left(x + \frac{13}{12}\right)^2 - \frac{289}{144} \right]$$

Il y a plusieurs méthodes pour démontrer ce genre d'égalité :

La première chose est de trouver l'ensemble d'étude pour vérifier que l'on travaille bien pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ensuite :

1. Développer un des deux membres de l'égalité pour retrouver l'autre.
2. Développer les deux membres de l'égalité et obtenir la même chose.
3. Factoriser un des deux membres de l'égalité pour retrouver l'autre.
4. Factoriser les deux membres de l'égalité et obtenir la même chose.
5. Mettre les deux membres de l'égalité au même dénominateur quand il y a des expressions rationnelles.
6. Montrer l'égalité du produit en croix lorsque l'on veut montrer que deux écritures rationnelles sont égales.
7. Elever au carré les deux membres de l'égalité s'il l'un des membres est une racine carrées.

Dans l'exemple ci-dessus, on peut appliquer la deuxième méthode :

Les expressions littérales existent pour toutes les valeurs de x donc $E = \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow 3(2x+5)(3x-1) = 3(6x^2 - 2x + 15x - 5) = 3(6x^2 + 13x - 5) = \boxed{18x^2 + 39x - 15}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 18 \left[\left(x + \frac{13}{12}\right)^2 - \frac{289}{144} \right] &= 18 \left(x^2 + \frac{13}{6}x + \frac{169}{144} - \frac{289}{144} \right) \\ &= 18 \left(x^2 - \frac{120}{144} + \frac{13}{6}x \right) = 18 \left(x^2 + \frac{13}{6}x - \frac{5}{6} \right) = \boxed{18x^2 + 39x - 15} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ On obtient donc que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 3(2x+5)(3x-1) = 18 \left[\left(x + \frac{13}{12}\right)^2 - \frac{289}{144} \right]$$

Exercice 3 : Démontrer les égalités ci-dessous :

$$1. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 6x^2 + 3x - 9 = 3(x-1)(2x+3)$$

$$2. 1 + 3 + 3^2 + 3^3 = \frac{3^4 - 1}{2}$$

$$3. 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1$$

$$4. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 2x^2 - 8x + 15 = 2(x-2)^2 + 7$$

$$5. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } (x+5)(x-3) = (x+1)^2 - 16$$

$$6. \text{ Pour tout } a \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } b \in \mathbb{R}, \text{ on a } a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$$

$$7. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \text{ et } x \neq -1, \text{ on a } \frac{1}{x+1} - \frac{9}{x-1} = \frac{-8x+10}{x^2-1}$$

$$8. \text{ Pour tout } q \in \mathbb{R}, q \neq 1, \text{ on a } 1 + q + q^2 = \frac{q^3 - 1}{q - 1}$$

$$9. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } (x+1)^2 - 9 + (x-2)^2 + 3 = 2 \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \right)$$

$$10. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } (x-2)(x+3)(x-1) = x^3 - 7x + 6$$

$$11. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 2\sqrt{x^2 + 3x + \frac{9}{4}} = 2x + 3$$