Généralités sur les fonctions

(En seconde)

Dernière mise à jour : Samedi 06 Janvier 2007

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2006-2007)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

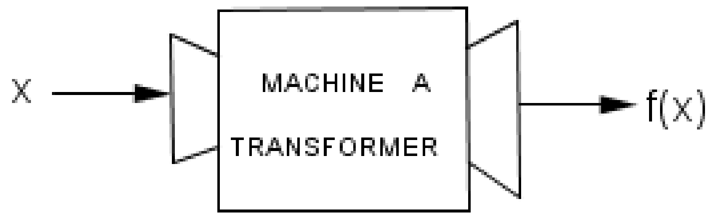
Stendhal

Table des matières

1 Définition et vocabulaire

1.1 Définition d'une fonction

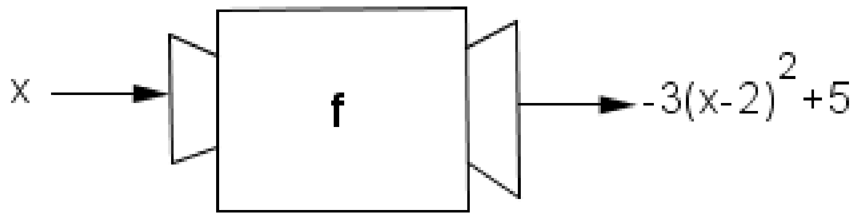
Définition (Fonctions) :
Nous connaissons déjà des transformations en géométrie comme les symétries, les translations et les rotations. Á un point A du plan elles associent un point A' que l'on nomme l'image de A par la transformation.
En algèbre il y a aussi des transformations qui à $x \in \mathbb{R}$ associe une image. Ces transformations ce nomme des **fonctions** et peuvent être symbolisées par une machine dans lequel on entre une matière première x et duquel il ressort une matière transformée (l'image de x) que l'on nomme $f(x)$.



Notation mathématique : Au lieu de faire des dessins de machine à chaque fois on va écrire que f est la transformation qui à x associe $f(x)$
On notera :

$\boxed{f : x \mapsto f(x)}$ se lit " la fonction f qui à x associe $f(x)$"

Exemple :



On remplacera ce dessin par : $f : x \mapsto -3(x-2)^2 + 5$
et on dira que l'image de x est $f(x)$ avec $f(x) = -3(x-2)^2 + 5$.

1.2 Image et antécédent

➠ On note $f(x)$ **l'image** de x par la fonction f. (Les images sont les matières transformées qui sortent de la machine f)
➠ On note x **un antécédent** de $f(x)$ par la fonction f. (Les antécédents sont les matières premières qui entrent dans la machine f)

Exemple :
On note f la fonction $f : x \mapsto 3x - 4$
➠ Calculons l'image de 3 par la fonction f :
L'image de 3 est $f(3) = 3 \times 3 - 4 = 9 - 4 = 5$ donc 5 est l'image de 3 par la fonction f.
➠ Calculons l'antécédent de 3 par la fonction f :
Pour trouver les antécédents il faut chercher x sachant que son image $f(x)$ doit être 3.
Il faut donc chercher x sachant que $f(x) = 3$
Résolvons cette équation : $f(x) = 3 \Leftrightarrow 3x + 4 = 3 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ donc $-\dfrac{1}{3}$ est l'antécédent de 3 par la fonction f.

Exemple :
on note g la fonction $g : x \mapsto x^2$
➠ Calculons l'image de -1 par la fonction g
$g(-1) = (-1)^2 = 1$ donc 1 est l'image de -1 par la fonction g
➠ Calculons l'antécédent de 3 par la fonction g
il faut pour ça résoudre $f(x) = 3$
$f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
donc $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ sont les antécédents de 3 par la fonction g.

Remarques :
- Pour un antécédent il y a qu'une seule image ou aucune.
- Pour une image il peut y avoir plusieurs antécédents.

1.3 Ensemble de définition

On note f la fonction définie par $f : x \mapsto f(x)$
$f(x)$ est une expression litérale et donc elle n'est peut-être pas définie sur l'ensemble des réels.
Il peut-y avoir des valeurs interdites. On note D_f l'ensemble d'étude de $f(x)$ et on le nomme **Ensemble de définition de f**

> On note D_f l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe
>
> et on nomme cet ensemble l'ensemble de définition de f.
>
> $$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \text{ existe}\}$$

Exemples :
➠ On note f la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$
$f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

➠ On note g la fonction définie par $g : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + x - 1$
$g(x)$ existe pour tous les réels donc $D_g = \mathbb{R}$

➠ On note h la fonction définie par $h : x \mapsto \sqrt{2x-4}$
$h(x)$ existe si et seulement si $2x - 4 \geq 0$ donc $x \geq 2$
donc $D_h = [2; +\infty[$

2 Courbe représentative d'une fonction

On souhaite représenter les fonctions dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Définition :

> On note $\mathcal{C}_f$ et on nomme **courbe repésentative de la fonction f**
>
> l'ensemble des points du repère de coordonnées $(x, f(x))$
>
> $$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \text{ avec } x \in \mathbb{D}_f\}$$

2.1 Tableau de valeurs

Pour placer des points de la courbe représentative de f dans un repère, on utilise souvent un tableau de valeurs de la forme :

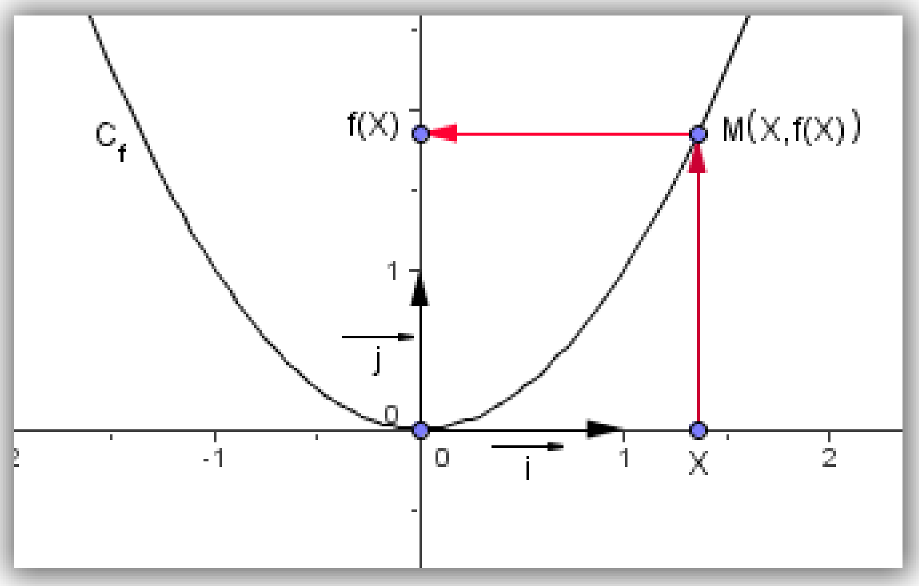
Abscisses	x	$\cdots$	$\cdots$
Ordonnées	$f(x)$	$\cdots$	$\cdots$

Exemple :
On souhaite tracer la courbe de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$.
Pour cela on peut utiliser le tableau de valeurs ci-dessous :

Abscisses	x	-4	-2	-1	0	1	2	4
Ordonnées	$f(x)$	16	4	1	0	1	4	16

2.2 Courbe représentative

La courbe représentative d'une fonction f est donc l'ensemble des points de coordonnées $((x, f(x))$.

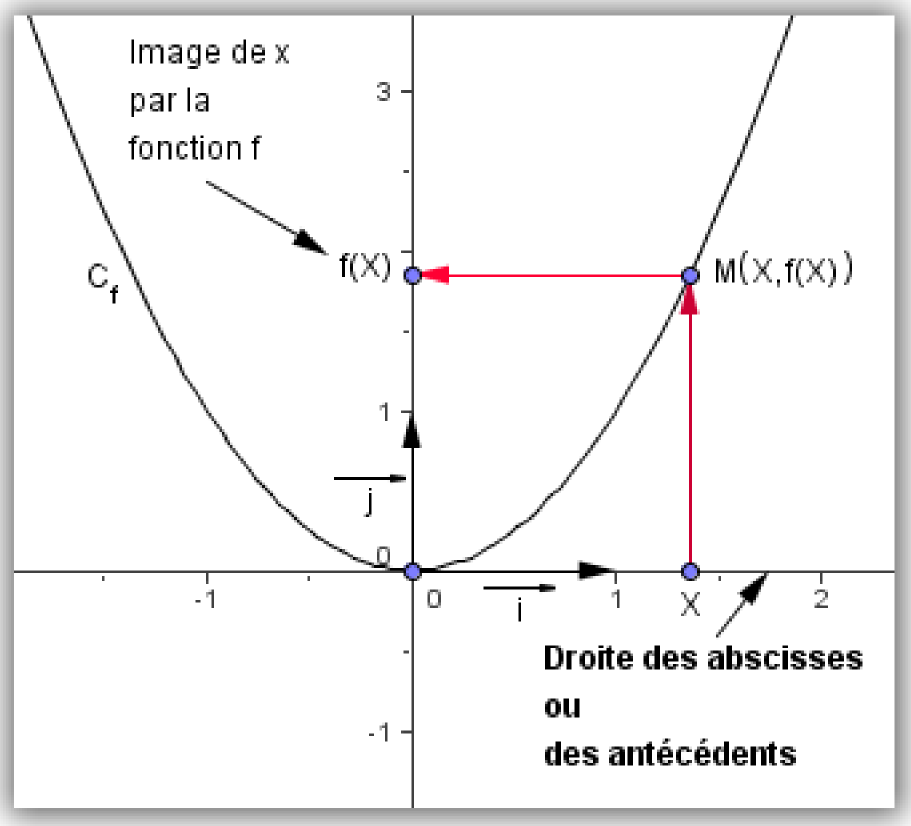


Exemples :

- ➠ Tracer la courbe représentative de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$
- ➠ Tracer la courbe représentative de la fonction carré $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
- ➠ Tracer la courbe représentative de la fonction carré $f : x \mapsto 2x - 3$
- ➠ Tracer la courbe représentative de la fonction carré $f : x \mapsto x\sqrt{x}$
- ➠ Tracer la courbe représentative de la fonction carré $f : x \mapsto -3(x-2)^2 + 5$
- ➠ Tracer la courbe représentative de la fonction carré $f : x \mapsto \dfrac{-2}{x-5}$

3 Recherche de l'image d'un nombre par une fonction f

3.1 Graphiquement



Pour trouver graphiquement l'image d'un nombre x par une fonction f, on se place sur la droite des abscisses en x puis on cherche le point M sur $\mathcal{C}_f$ qui a pour abscisse x. L'image de x par la fonction f sera l'ordonnée de M.

3.2 Par le calcul

Si on connaît l'expression algébrique de la fonction f, pour calculer l'image de a par la fonction f il suffit de calculer $f(a)$.
Exemples :

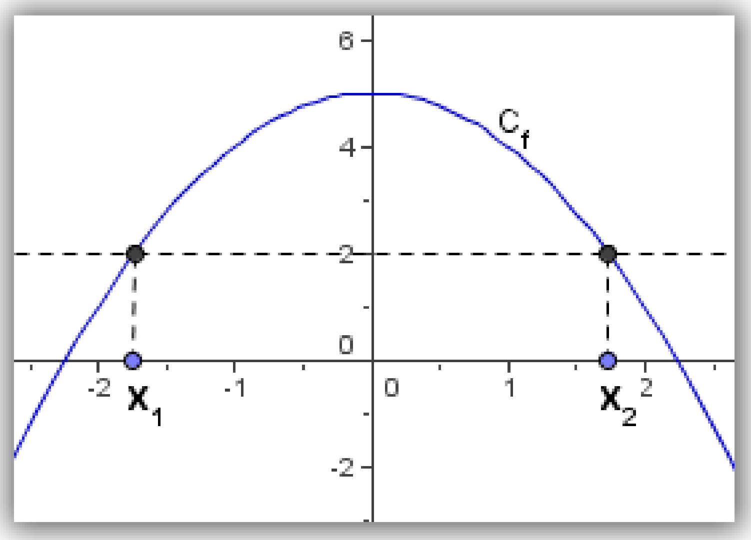
➠ On note $f : x \mapsto -3(x-2)^2 + 1$
Calculons l'image de 2 par la fonction f :
$f(2) = -3(2-2)^2 + 1 = -3 \times 0 + 1 = 1$ donc $f(2) = 1$ et 1 est l'image de 2 par f.

➠ On note $g : x \mapsto \dfrac{1}{2x+3}$
Calculons l'image de -2 par la fonction g :
$g(-2) = \dfrac{1}{2(-2)+3} = \dfrac{1}{-1} = -1$ donc $f(-2) = -1$ et -1 est l'image de -2 par la fonction g.

➠ On note $h : x \mapsto \sqrt{4-3x}$
Calculons l'image de -4 par la fonction h :
$h(-4) = \sqrt{4-3(-4)} = \sqrt{16} = 4$ donc $f(-4) = 4$ et 4 est l'image de -4 par la fonction h.

4 Recherche des antécédents d'un nombre par une fonction f

4.1 Graphiquement



Pour trouver graphiquement les antécédents d'un nombre a par une fonction f, on se place sur la droite des ordonnées en a puis on trace une droite horizontale passant par ce point. Cette droite coupe la courbe en plusieurs points. Les antécédents de a sont tous les abscisses de ces points d'intersection.
Exemple :
Sur le graphique ci-dessus, les antécédents de 2 par la fonction f sont $x_1 \approx -1,75$ et $x_2 \approx 1,75$.

4.2 Par le calcul

Si on connaît l'expression algébrique de la fonction f, pour calculer les antécédents de a par la fonction f il suffit de résoudre l'équation $f(x) = a$.
Exemples :

➠ On note $f : x \mapsto (x-2)^2 + 1$
Calculons les antécédents de 5 par la fonction f :
Il faut donc résoudre : $(x-2)^2 + 1 = 5$
$(x-2)^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2) = 2$ ou $(x-2) = -2$ donc $x = 4$ ou $x = 0$
Donc les antécédents de 5 par f sont 0 et 4.

➠ On note $g : x \mapsto \dfrac{1}{2x+3}$
Calculons les antécédents de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction g :
Il faut donc résoudre $\dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{1}{2}$ avec $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{3}{2}\}$
$\dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+3 = 2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
donc l'antécédent de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction g est $-\dfrac{1}{2}$

➠ On note $h : x \mapsto \sqrt{4-3x}$
Calculons les antécédents de 2 par la fonction h :
Il faut résoudre $\sqrt{4-3x} = 2$ avec $D_h =]-\infty; \dfrac{4}{3}]$
$\sqrt{4-3x} = 2 \Leftrightarrow 4 - 3x = 4 \Leftrightarrow x = 0$
donc l'antécédent de 2 par la fonction h est 0.

5 Equations et fonctions

5.1 Résolution graphique de $f(x) = k$

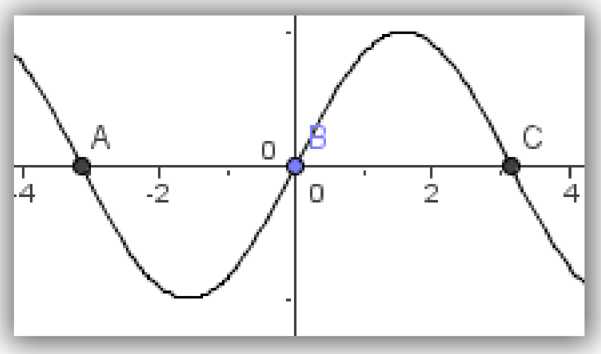
Cela revient à rechercher graphiquement les antécédents de k par la fonction f. Voir le paragraphe ci-dessus (4.1).

5.2 Résolution par le calcul de $f(x) = k$

Cela revient à rechercher par le calcul les antécédents de k par la fonction f. Voir le paragraphe ci-dessus (4.2).

5.3 Cas particulier de $f(x) = 0$

Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ il faut trouver les abscisses des points d'intersection entre la courbe et la droite des abscisses.

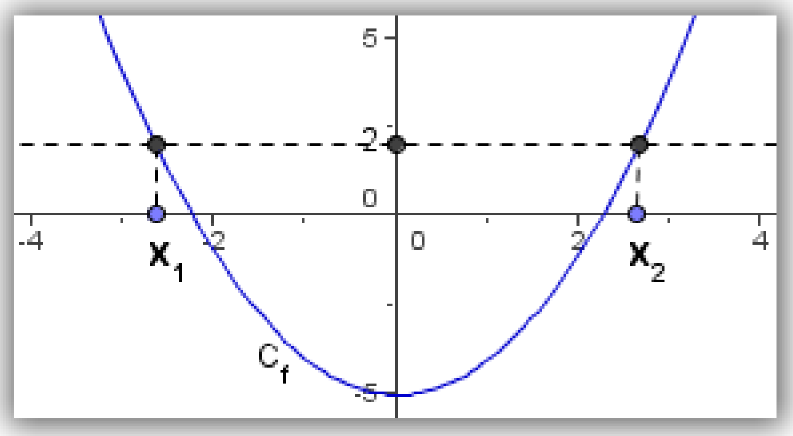


Dans l'exemple ci-dessus :
Sur l'intervalle $[-4; 4]$ l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions et l'ensemble solution est $S = \{ \quad -3,14 \quad ; \quad 0 \quad ; \quad 3,14 \quad \}$

6 Inéquations et fonctions

6.1 Résolution graphique de $f(x) \leq k$ (ou $<, >, \geq$)

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq k$, il faut trouver les abscisses des points de la courbe dont les ordonnées sont inférieures ou égales à k.
Exemples :



Dans cet exemple, on souhaite résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-4; 4]$ l'inéquation $f(x) \leq 2$.
On remarque que tous les points de la courbe qui ont une ordonnée inférieure ou égale à 2 sont les points dont les abscisses sont entre x_1 et x_2 compris.
Donc l'ensemble solution est $S = [x_1; x_2]$ ou dans cet exemple : $S = [-1,75; 1,75]$

6.2 Résolution par le calcul de $f(x) \leq k$ (ou $<, >, \geq$)

Si on connaît l'expression algébrique de f alors il suffit de résoudre $f(x) \leq k$.
Si l'inéquation est du premier degré alors on connaît la méthode de résolution mais si le degré est plus grand on ne le sait pas encore. On verra plus tard comment faire dans un autre chapitre.

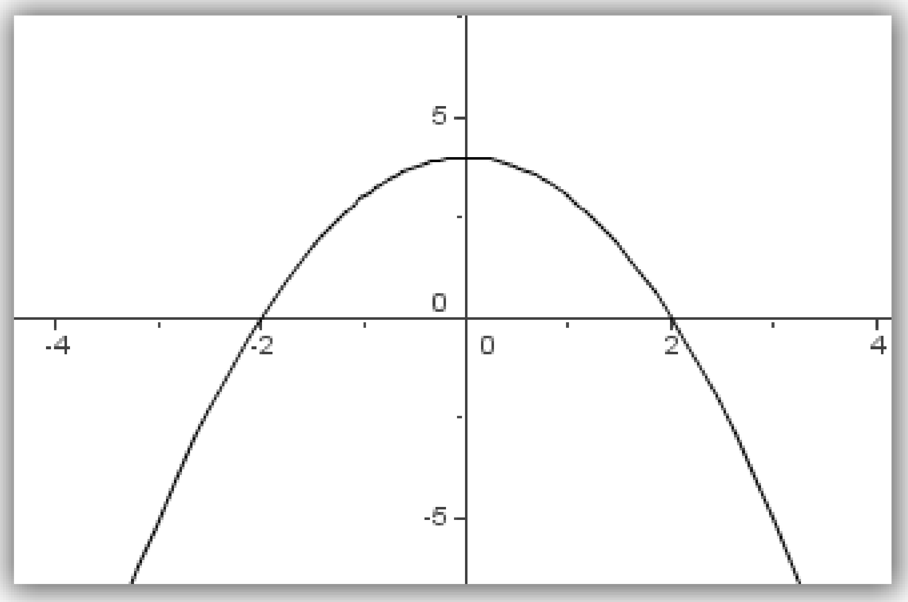
Exemple :

On note la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -3x + 4$
On souhaite résoudre $f(x) \leq 7$
$f(x) \leq 7 \Leftrightarrow -3x + 4 \leq 7 \Leftrightarrow -3x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{3}{3}$
donc $x \geq -1$. D'où l'ensemble solution est $S = [-1; +\infty[$

6.3 Cas particulier de $f(x) \leq 0$ (ou $<, >, \geq$)

Premier cas :
➠ Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$ il suffit de trouver les abscisses des points de la courbe qui se situent en dessous de l'axe des abscisses.
➠ Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$ il suffit de trouver les abscisses des points de la courbe qui se situent au dessus de l'axe des abscisses.

Exemple :



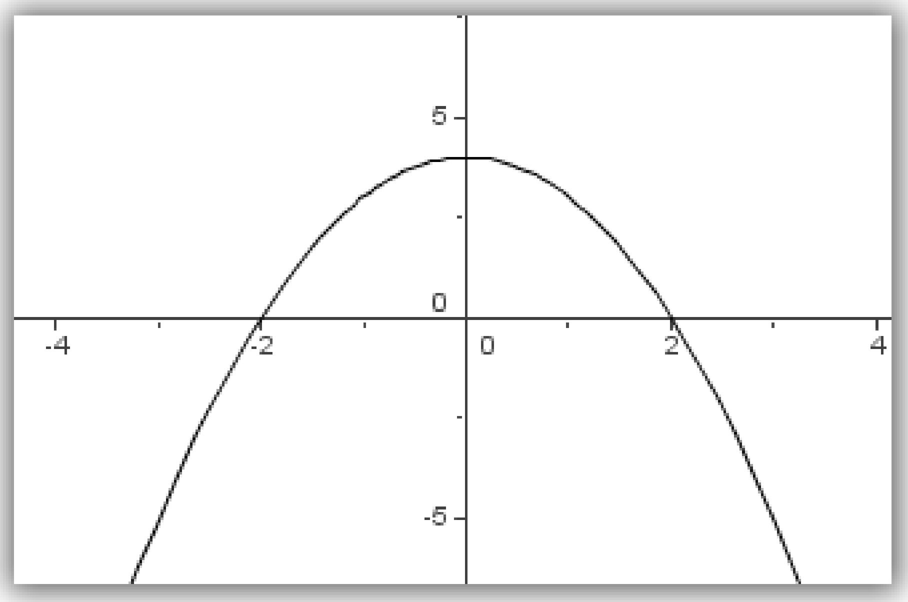
➠ Sur $[-4; 4]$ l'inéquation $f(x) > 0$ admet pour solution $S =]-2; 2[$

➠ Sur $[-4; 4]$ l'inéquation $f(x) < 0$ admet pour solution $S = [-4; -2] \cup]2; 4]$

6.4 Tableau des signes

On peut résumer le signe de $f(x)$ dans un tableau que l'on nommera **tableau de signe de la fonction f**

Exemple :
Si on veut dresser le tableau de signe de la fonction ci dessous, sur l'intervalle $[-4;4]$:



On obtient :

x	-4		-2		2		$+4$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

7 Parité des fonctions

7.1 Fonctions paires et conséquence graphique

Définition : **Fonction paire**

Soit f une fonction définie sur D_f
On dit que f est une fonction paire si elle vérifie les deux conditions ci-dessous :

➠ D_f est symétrique par rapport à 0

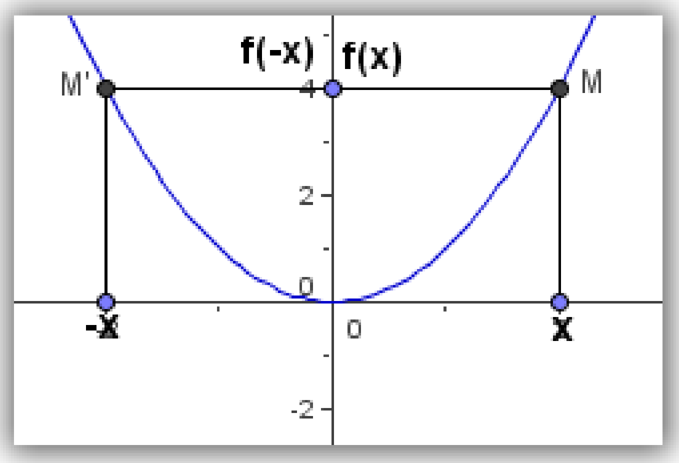
➠ $\forall x \in D_f$ on a $f(-x) = f(x)$

Exemples :

➠ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 + 1$
Comme $D_f = \mathbb{R}$ alors D_f est symétrique par rapport à 0.
De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$
donc f est une fonction paire.

➠ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$
Comme $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alors D_f est symétrique par rapport à 0.
De plus $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a $f(-x) = \dfrac{1}{|-x|} = \dfrac{1}{|x|} = f(x)$
donc f est une fonction paire.

Conséquence graphique



Propriété

Si f est paire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(O, \overrightarrow{j})$

7.2 Fonctions impaires et conséquence graphique

Définition : **Fonction impaire**

Soit f une fonction définie sur D_f
On dit que f est une fonction impaire si elle vérifie les deux conditions ci-dessous :

➠ D_f est symétrique par rapport à 0

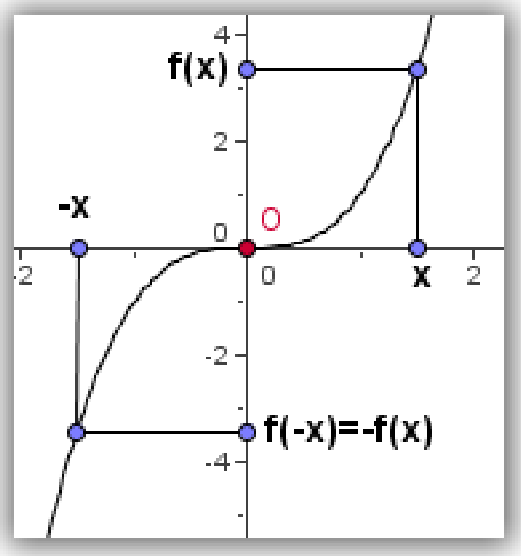
➠ $\forall x \in D_f$ on a $f(-x) = -f(x)$

Exemples :

➠ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3$
Comme $D_f = \mathbb{R}$ alors D_f est symétrique par rapport à 0.
De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(-x) = (-x)^3 = x - x^3 = -f(x)$
donc f est une fonction impaire.

➠ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{x}$
Comme $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alors D_f est symétrique par rapport à 0.
De plus $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$
donc f est une fonction impaire.

Conséquence graphique



Propriété

Si f est impaire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère $O(0;0)$

8 Les fonctions périodiques

8.1 Définition

Définition : **Fonction pédiodique**

Soit f une fonction définie sur D_f
On dit que f est une fonction périodique de période T (ou T-périodique) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ on a } f(x+T) = f(x)$$

Exemples classiques :

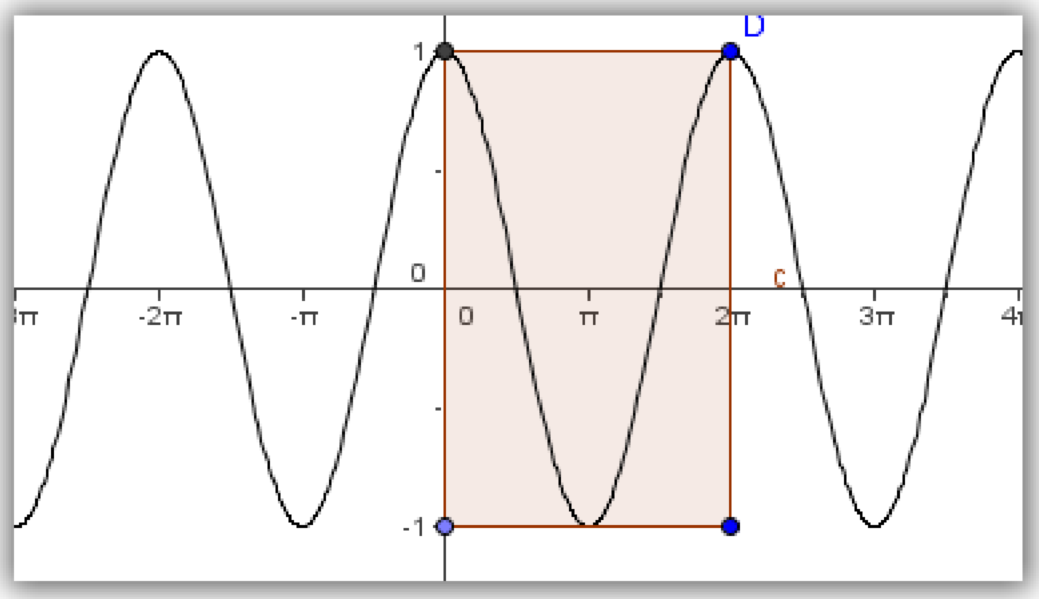
1. La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est 2π-périodique.
   On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
   (Vérification avec calculatrice)
2. La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est 2π-périodique.
   On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
   (Vérification avec calculatrice)
3. La fonction $f : x \mapsto \tan(x)$ est π-périodique.
   On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
   (Vérification avec calculatrice)

8.2 Conséquence graphique

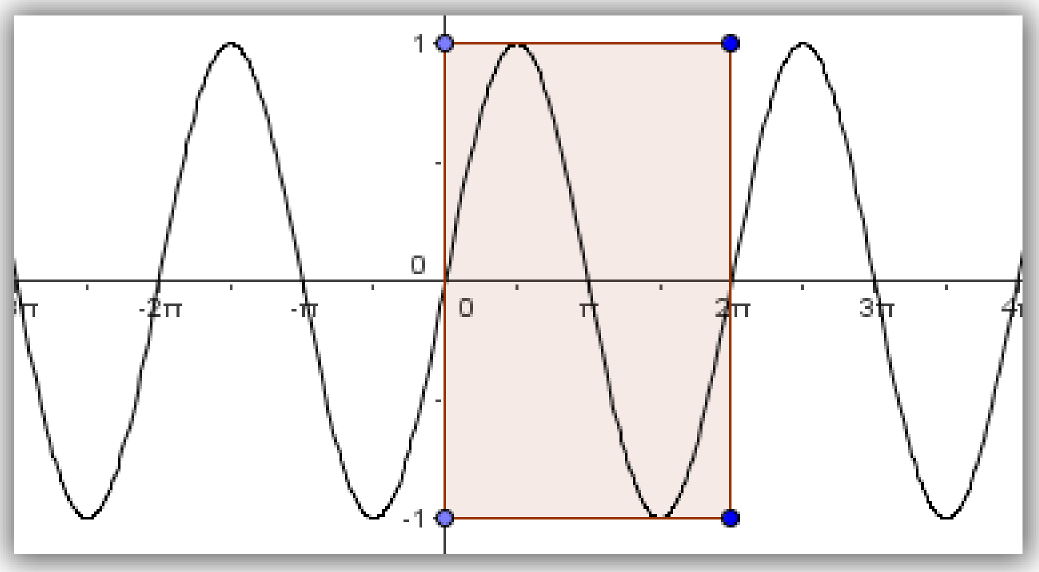
Si on trace la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0;T]$ alors pour obtenir toute la courbe sur D_f il suffit de répéter plusieurs fois la partie tracée précédemment.
On peut réduire ainsi l'ensemble d'étude à un intervalle de longueur T et ensuite par translations, tracer toute la courbe.

Exemples :

➠ Regardons la représentation graphique de la fonction cosinus qui est 2π-périodique.

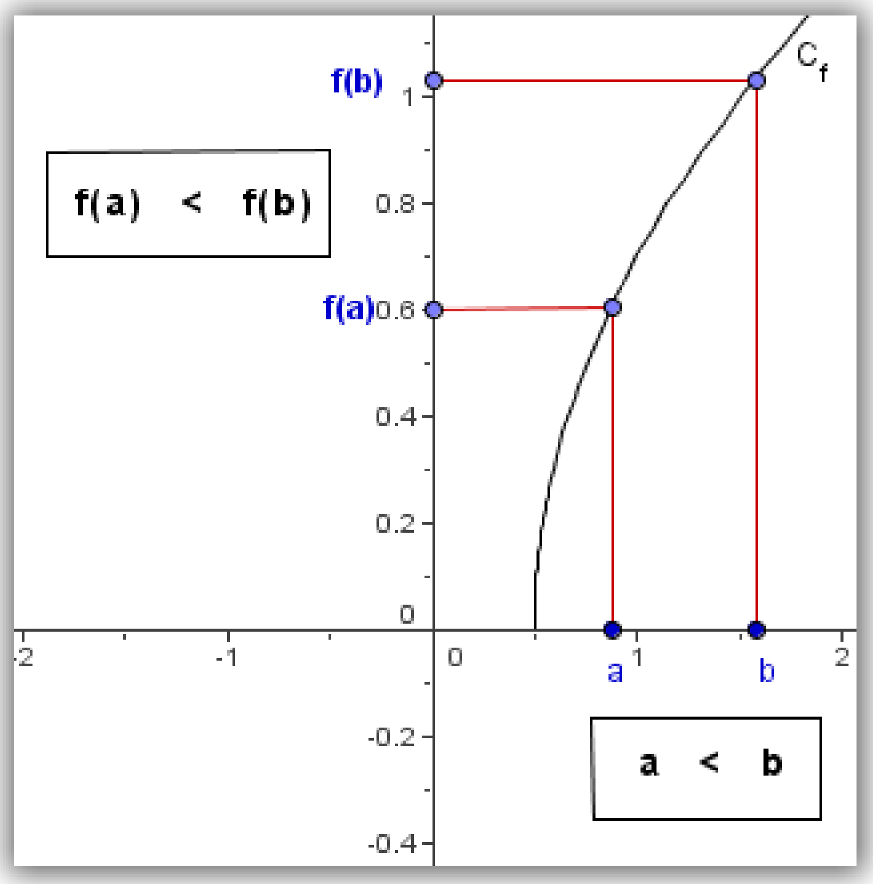


➠ Regardons la représentation graphique de la fonction sinus qui est 2π-périodique.



9 Variations des fonctions

9.1 Fonctions strictement croissantes



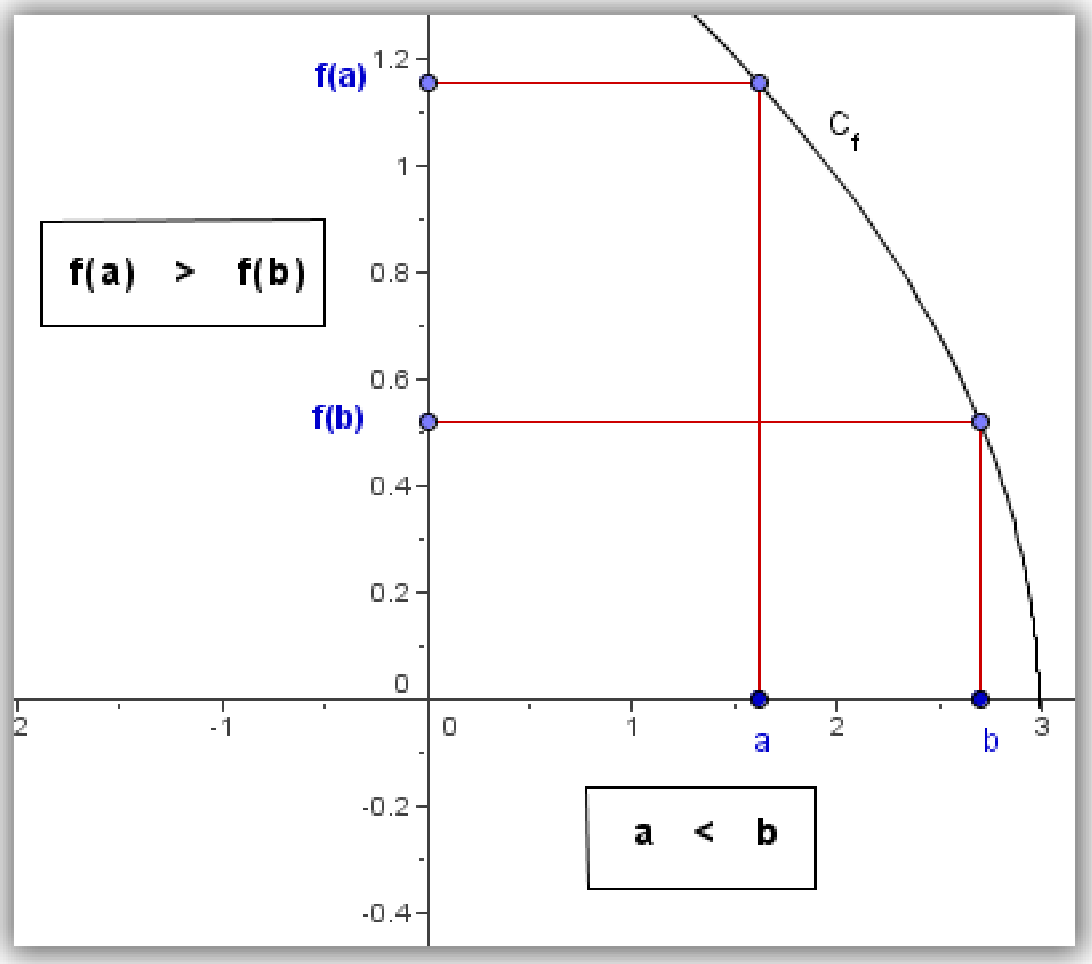
Définition (**Fonction strictement croissante**)

> Soit f une fonction définie sur D_f
> On dit que f est une fonction strictement croissante sur un intervalle I inclus dans D_f
>
> si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ si on a $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
>
> Les images et les antécédents respectifs sont dans le même ordre.

ATTENTION : On ne dit pas qu'une courbe monte mais on dit que sa fonction associée est croissante.

Exemple :
On note f la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$
➠ Démontrons que sur $I = [0, +\infty[$ alors f est strictement croissante.
Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$
alors $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Or $a < b$ donc $a - b < 0$, de plus a et b positifs donc $a + b > 0$. Conclusion $(a - b)(a + b) < 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$
d'où f est strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$

9.2 Fonctions strictement décroissantes



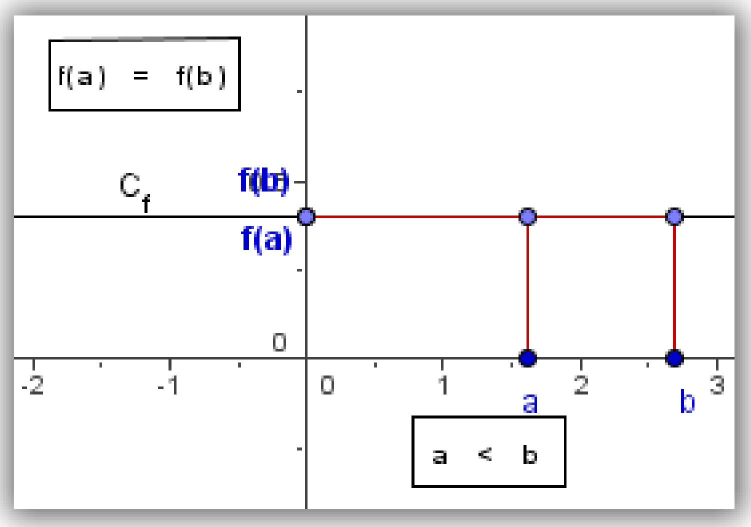
Définition (**Fonction strictement décroissante**)

> Soit f une fonction définie sur D_f
> On dit que f est une fonction strictement décroissante sur un intervalle I inclus dans D_f
>
> si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ si on a $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
>
> Les images et les antécédents respectifs sont dans l'ordre inverse.

ATTENTION : On ne dit pas qu'une courbe descend mais on dit que sa fonction associée est décroissante.

Exemple :
On note f la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$
➠ Démontrons que sur $I =]-\infty, 0]$ alors f est strictement décroissante.
Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$
alors $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Or $a < b$ donc $a - b < 0$, de plus a et b négatifs donc $a + b < 0$. Conclusion $(a-b)(a+b) > 0$ donc $f(a) - f(b) > 0$ donc $f(a) > f(b)$
d'où f est strictement décroissante sur $I =]-\infty, 0]$

9.3 Fonctions constantes



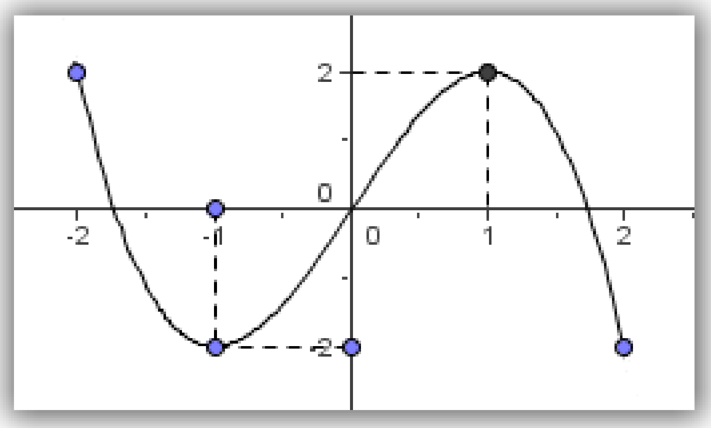
Définition (**Fonction constante**)

> Soit f une fonction définie sur D_f
> On dit que f est une fonction constante sur un intervalle I inclus dans D_f
>
> si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ si on a $a \neq b$ alors $f(a) = f(b)$.
>
> Quelque soient les antécédents, leurs images respectives sont identiques.

ATTENTION : On ne dit pas qu'une courbe reste droite mais on dit que sa fonction associée est constante.

9.4 Tableaux de variation

On peut résumer les variations d'une fonction dans un tableau que l'on nomme **tableau des variations** de la fonction f.
Exemple :



On va donc résumer les variatiosn f comme ci-dessous :

x	-2		-1		1		2
	2				2		
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-2				-2

10 Extremum des fonctions

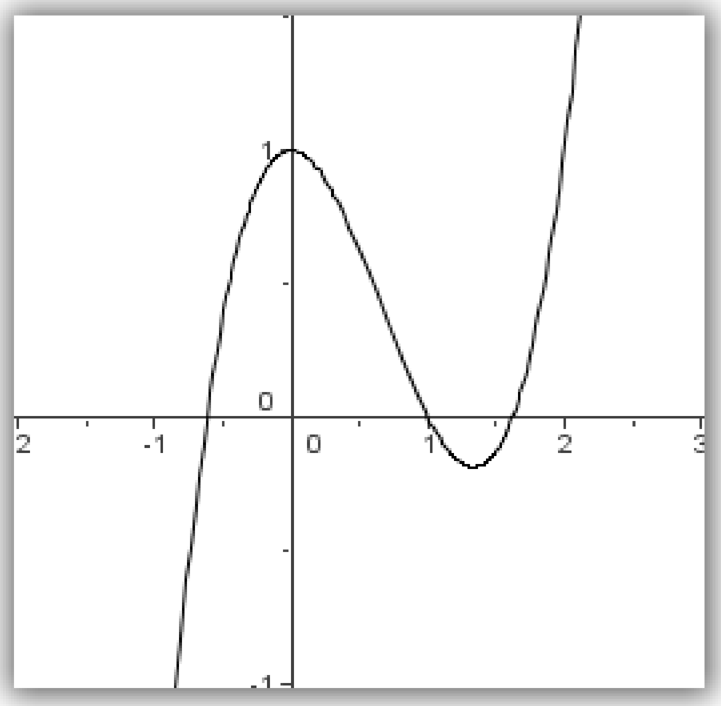
10.1 Maximum

10.1.1 Maximum local

Définition (**Maximum local**)

> Soit f une fonction définie sur D_f
> On dit que f admet un maximum local f(a) sur I inclus dans D_f
>
> si $\forall x \in I$, il existe $a \in I$ tel que $f(x) \leq f(a)$.

Exemple : Graphiquement, on voit que la fonction ci-dessous admet 1 comme maximum local sur l'intervalle $[-1; 1]$

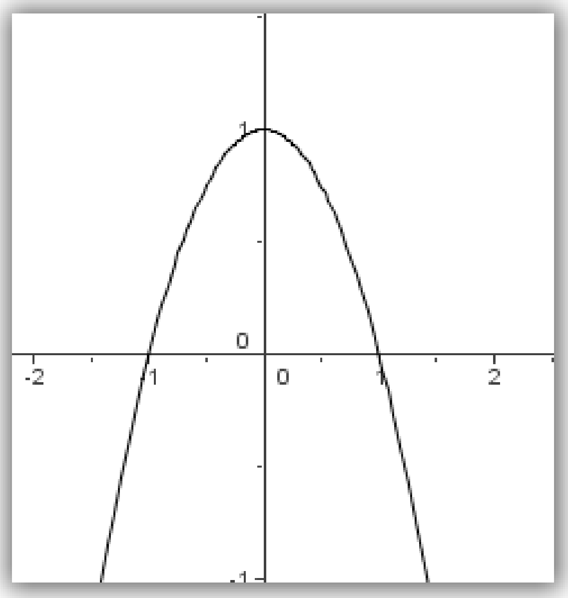


10.1.2 Maximum global

Définition (**Maximum global**)

> Soit f une fonction définie sur D_f
> On dit que f admet un maximum global f(a)
>
> si $\forall x \in D_f$, il existe $a \in D_f$ tel que $f(x) \leq f(a)$.

Exemple : On trace la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 1$ dans un repère orthogonal.
Démontrons que 1 est le maximum de f.



$D_f = \mathbb{R}$
Première partie :
$f(0) = -0^2 + 1 = 1$ donc $f(0) = 1$
Deuxième partie :
Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \leq f(0)$
$f(x) - f(0) = -x^2 + 1 - 1 = -x^2$ or $-x^2$ est toujours négatif donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) - f(0) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(0)$
Conclusion : 1 est le maximum de la fonction f.

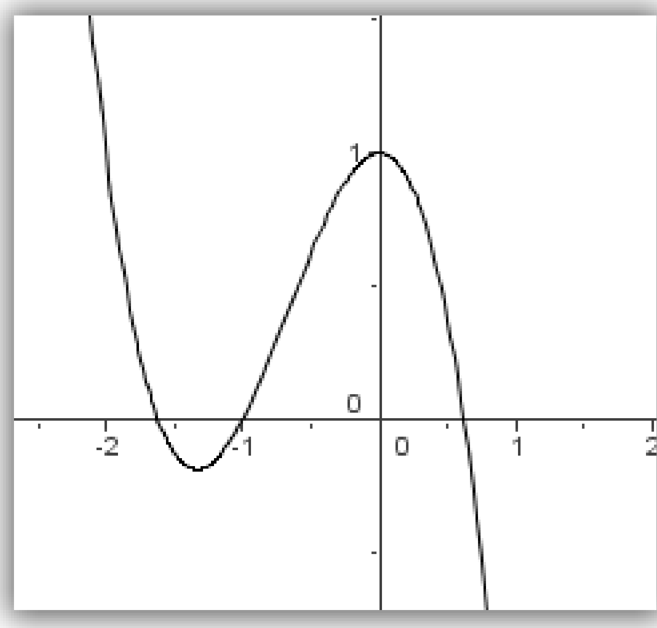
10.2 Minimum

10.2.1 Minimum local

Définition (**Minimum local**)

> Soit f une fonction définie sur D_f
> On dit que f admet un Minimum local f(a) sur I inclus dans D_f
>
> si $\forall x \in I$, il existe $a \in I$ tel que $f(x) \geq f(a)$.

Exemple : Graphiquement, on voit que la fonction ci-dessous admet environ $-0,2$ comme minimum local sur l'intervalle $[-2; 0]$



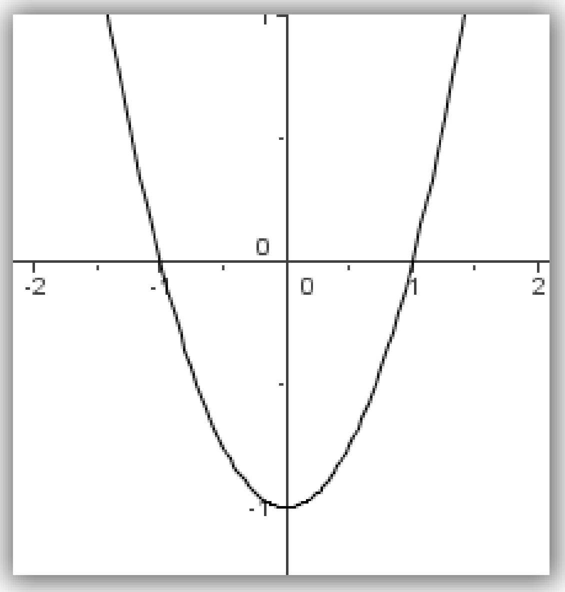
10.2.2 Minimum global

Définition (**Minimum global**)

Soit f une fonction définie sur D_f
On dit que f admet un minimum global f(a)

si $\forall x \in D_f$, il existe $a \in D_f$ tel que $f(x) \geq f(a)$.

Exemple : On trace la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$ dans un repère orthogonal.
Démontrons que -1 est le minimum de f.



$D_f = \mathbb{R}$
Première partie :
$f(0) = 0^2 - 1 = -1$ donc $f(0) = -1$

Deuxième partie :
Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \geq f(0)$
$f(x) - f(0) = x^2 - 1 - (-1) = x^2$ or x^2 est toujours positif donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) - f(0) \geq 0$ donc $f(x) \geq f(0)$
Conclusion : -1 est le minimum de la fonction f.