Les fonctions affines

Seconde

Dernière mise à jour : Dimanche 3 Février 2008

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2007-2008)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Définitions et vocabulaire

1.1 Les fonctions affines

On dit que f est une fonction affine si elle est de la forme
$f : x \mapsto ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Les fonctions affines sont très souvent utilisées dans les matières scientifiques comme en Physique-Chimie ou en S.V.T.
Exemples :

1. $f_1 : x \mapsto -2x + 3$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{2}x - 1$
3. $f_3 : x \mapsto 3x$
4. $f_4 : x \mapsto -2$

1.2 Les fonctions linéaires

On dit que f est une fonction linéaire si elle est de la forme
$f : x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$

Remarque : Les fonctions linéaires sont des fonctions affines car $f(x) = ax = ax + 0$
Les fonctions linéaires sont utilisées dans les problèmes de proportionnalité. Exemples :

1. $f_1 : x \mapsto -2x$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{2}x$
3. $f_3 : x \mapsto 3x$

1.3 Taux de variation

On nomme taux de variation d'une fonction f entre x_1 et x_2, et on note $\tau_{[x_1,x_2]}(f)$
le réel défini par $\tau_{[x_1,x_2]}(f) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

1.3.1 Propriétés

Si f est une fonction affine alors pour tout x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$ avec $x_1 \neq x_2$
le taux de variation entre x_1 et x_2 est contant et égal à a.
Pour tout x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$ avec $x_1 \neq x_2$, $\tau_{[x_1,x_2]}(f) = a$

Démonstration :

On note $f : x \mapsto ax + b$
Pour tout x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$ avec $x_1 \neq x_2$,

$$\tau_{[x_1,x_2]}(f) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} == \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Est-ce le cas pour les autres fonctions :

On note $f : x \mapsto x^2$
Pour tout x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$ avec $x_1 \neq x_2$,
$\tau_{[x_1,x_2]}(f) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \dfrac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$
Donc le taux de variation n'est pas constant.

En fait cette propriété est une particularité des fonctions affines.
Si f est une fonction affine alors le taux de variation entre deux points quelconque, est toujours le même. Elle varie de façon constante ...
Si f est une fonction affine de la forme $f : x \mapsto ax + b$ alors :

$$\tau_{[1,2]}(f) = \tau_{[1,7]}(f) = \tau_{[-7,-8]}(f) = \tau_{[-\frac{1}{2},\sqrt{3}]}(f) = \tau_{[-\pi,-\sqrt{5}]}(f) = \ldots\ldots = a$$

2 Étude des fonctions affines

Pour toute la suite on note f la fonction telle que $f : x \mapsto ax + b$.

2.1 Ensemble de définition

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x dans $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.
L'ensemble de définition des fonctions affines est $\mathbb{R}$.

2.2 Variations des fonctions affines

On note x_1 et x_2 deux nombres de $\mathbb{R}$ tels que $\boxed{x_1 < x_2}$.
$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$
donc $\boxed{f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)}$.
Signe de $x_1 - x_2$:
On sait que $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$ (négatif)
Or $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)$ donc $f(x_1) - f(x_2)$ est du signe contraire de a.
Il y a donc trois cas possibles :

Si $\boxed{a > 0}$ $f(x_1) - f(x_2)$ est le produit d'un négatif par un positif donc il est négatif.
Donc $f(x_1) - f(x_2) < 0$ et $f(x_1) < f(x_2)$. On avait au départ $x_1 < x_2$
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. et son tableau de variation est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

Si $\boxed{a < 0}$ $f(x_1) - f(x_2)$ est le produit d'un négatif par un négatif donc il est positif.
Donc $f(x_1) - f(x_2) > 0$ et $f(x_1) > f(x_2)$. On avait au départ $x_1 < x_2$
donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. et son tableau de variation est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

Si $\boxed{a = 0}$ $f(x_1) - f(x_2)$ est le produit d'un négatif par un nul donc il est nul.
Donc $f(x_1) - f(x_2) = 0$ et $f(x_1) = f(x_2)$. On avait au départ $x_1 < x_2$
donc f est constante sur $\mathbb{R}$. et son tableau de variation est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\longrightarrow$	

Exemples :

1. Dresser le tableau des variations de $f : x \mapsto 2x - 3$.
2. Dresser le tableau des variations de $f : x \mapsto -2x - 3$.

3. Dresser le tableau des variations de $f : x \mapsto 5 - 3x$.
4. Dresser le tableau des variations de $f : x \mapsto -3x$.

2.3 Signe des fonctions affines

Si $\boxed{a = 0}$ ce n'est pas très difficile car $f(x) = b$ donc est du signe de b.
Son tableau des signes est donc :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de b	

Pour trouver le signe de $f(x)$ il faut chercher les x de $\mathbb{R}$ tels que $ax + b > 0$
$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$
Il y a deux cas à étudier :

Si $\boxed{a > 0}$ $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$
Son tableau des signes est donc :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $\boxed{a < 0}$ $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$ Son tableau des signes est donc :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Conclusion : On peut résumer ça de la façon suivante :
Le tableau des signes d'une fonction affine est :

Si $\boxed{a = 0}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de b	

Si $\boxed{a \neq 0}$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemples :

1. Dresser le tableau des signes de $f : x \mapsto 2x - 3$.
2. Dresser le tableau des signes de $f : x \mapsto -2x - 3$.
3. Dresser le tableau des signes de $f : x \mapsto 5 - 3x$.
4. Dresser le tableau des signes de $f : x \mapsto 3x$.

2.4 Représentation graphique des fonctions affines

3 Droites et équations de droites

3.1 Équation de droites

3.2 Trouver l'équation d'une droite

3.2.1 Graphiquement

3.2.2 Par le calcul

3.3 Tracer une droite d'équation donnée

3.4 Point d'intersection entre deux droites

4 Résolution de problèmes