Exercice 1 :

1. On note $f : x \longmapsto (x+2)^2 - 4$

   (a) $\forall a \in D_f$ et $\forall b \in D_f$ on a :
   $f(a) - f(b)$
   $= [(a+2)^2 - 4] - [(b+2)^2 - 4]$
   $= (a+2)^2 - 4 - (b+2)^2 + 4$
   $= (a+2)^2 - (b+2)^2$
   $= (a+2+b+2)(a+2-b-2) = (a+b+4)(a-b)$
   donc $\boxed{f(a) - f(b) = (a+b+4)(a-b)}$

   (b) On note a et b deux nombres de $[-2; +\infty[$
   tels que $\boxed{a < b}$.
   Comme $f(a) - f(b) = (a+b+4)(a-b)$ alors nous allons chercher le signe de $(a-b)$ et de $(a+b+4)$:
   <u>Signe de $a-b$</u> :
   Comme $a < b$ alors $a - b < 0$ (négatif)
   <u>Signe de $a+b+4$</u> :
   Comme $a \geq -2$ et $b > -2$ alors $a+b > -4$
   donc $a+b+4 > 0$ (positif).
   <u>Conclusion</u> :
   $f(a) - f(b) < 0$ donc $\boxed{f(a) < f(b)}$
   Comme il n'y a pas de changement d'ordre :
   $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
   donc f est strictement croissante sur $[-2; +\infty[$

   (c) On note a et b deux nombres de $]-\infty; -2]$
   tels que $\boxed{a < b}$.
   Comme $f(a) - f(b) = (a+b+4)(a-b)$ alors nous allons chercher le signe de $(a-b)$ et de $(a+b+4)$:
   <u>Signe de $a-b$</u> :
   Comme $a < b$ alors $a - b < 0$ (négatif)
   <u>Signe de $a+b+4$</u> :
   Comme $a < -2$ et $b \leq -2$ alors $a+b < -4$
   donc $a+b+4 < 0$ (négatif).
   <u>Conclusion</u> :
   $f(a) - f(b) > 0$ donc $\boxed{f(a) > f(b)}$
   Comme il y a un changement d'ordre :
   $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
   donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$

   (d) Dressons le tableau de signe de f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	

   $f(-2) = -4$ est donc le minimum de la fonction f pour $x = -2$.

2. On note $g : x \longmapsto \dfrac{2}{x+1}$

   (a) $\forall a \in D_g$ et $\forall b \in D_g$ on a :
   $g(a) - g(b)$
   $= \dfrac{2}{a+1} - \dfrac{2}{b+1} = \dfrac{2(b+1)}{(a+1)(b+1)} - \dfrac{2(a+1)}{(b+1)(a+1)}$
   $= \dfrac{2(b+1) - 2(a+1)}{(a+1)(b+1)} = \dfrac{2b+2-2a-2}{(a+1)(b+1)}$
   $= \dfrac{2(b-a)}{(a+1)(b+1)}$ donc $\boxed{g(a) - g(b) = \dfrac{2(b-a)}{(a+1)(b+1)}}$

   (b) On note a et b deux nombres de $]-1; +\infty[$
   tels que $\boxed{a < b}$.
   Comme $g(a) - g(b) = \dfrac{2(b-a)}{(a+1)(b+1)}$ alors nous allons chercher le signe de $(b-a)$ de $(a+1)$ et de $(b+1)$:
   <u>Signe de $b-a$</u> :
   Comme $a < b$ alors $b - a > 0$ (positif)
   <u>Signe de $a+1$</u> :
   Comme $a > -1$ et $a + 1 > 0$ (positif)
   <u>Signe de $b+1$</u> :
   Comme $b > -1$ et $b + 1 > 0$ (positif)
   <u>Conclusion</u> :
   $g(a) - g(b) > 0$ donc $\boxed{g(a) > g(b)}$
   Comme il y a un changement d'ordre :
   $a < b \Rightarrow g(a) > g(b)$
   donc g est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$

   (c) On note a et b deux nombres de $]-\infty; -1[$
   tels que $\boxed{a < b}$.
   Comme $g(a) - g(b) = \dfrac{2(b-a)}{(a+1)(b+1)}$ alors nous allons chercher le signe de $(b-a)$ de $(a+1)$ et de $(b+1)$:
   <u>Signe de $b-a$</u> :
   Comme $a < b$ alors $b - a > 0$ (positif)
   <u>Signe de $a+1$</u> :
   Comme $a < -1$ et $a + 1 < 0$ (négatif)
   <u>Signe de $b+1$</u> :
   Comme $b < -1$ et $b + 1 < 0$ (négatif)
   <u>Conclusion</u> :
   $g(a) - g(b) > 0$ donc $\boxed{g(a) > g(b)}$
   Comme il y a un changement d'ordre :
   $a < b \Rightarrow g(a) > g(b)$
   donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$

Exercice 2 (Devoir commun 2007):
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. Soient x_1 et x_2 deux réels dans l'intervalle $[2; +\infty[$ tels que $x_1 < x_2$.
   $f(x_2) - f(x_1)$
   $= (x_1^2 - 4x_1 + 3) - (x_2^2 - 4x_2 + 3)$
   $= x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 4x_2 = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2$
   $= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2)$
   $= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$
   donc $\boxed{f(x_2) - f(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)}$
2. Comme $f(x_2) - f(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$ alors nous allons chercher le signe de $(x_1 - x_2)$ et de $(x_1 + x_2 - 4)$:
   <u>Signe de $x_1 - x_2$</u> :
   Comme $x_1 < x_2$ alors $x_1 - x_2 < 0$ (négatif)
   <u>Signe de $x_1 + x_2 - 4$</u> :
   Comme $x_1 \geq 2$ et $x_2 > 2$ alors $x_1 + x_2 > 4$
   donc $x_1 + x_2 - 4 > 0$ (positif).
   <u>Conclusion</u> :
   $f(x_2) - f(x_1) < 0$ donc $\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$
   Comme il n'y a pas de changement d'ordre :
   $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2 b)$
   donc f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $(x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$
   donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)^2 - 1$
4. $f(x) = 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 9 = 0$
   $\Leftrightarrow (x - 2 + 3)(x - 2 - 3) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5) = 0$
   $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 5$
   Donc l'ensemble des solutins est $S = \{-1; 5\}$
5. $f(x) = -2 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow (x-2)^2 = -1$
   Or dans $\mathbb{R}$ un carré n'est pas négatif donc il n'y a pas de solution.
   On a donc $S = \emptyset$
6. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) + 1 = (x-2)^2$
   Or dans $\mathbb{R}$ un carré est toujours positif donc
   $f(x) + 1 \geq 0$ donc $f(x) \geq -1$ et $f(2) = -1$
   donc -1 est le minimum de f pour $x = 2$.
7. Dressons le tableau de signe de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Exercice 3 :
On note f la fonction $x \mapsto 2x^2 - 8x + 13$

1. $f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x donc $D_f = \mathbb{R}$.

2. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$ alors
$f(a) - f(b) = (2a^2 - 8a + 13) - (2b^2 - 8b + 13)$
$= 2a^2 - 8a + 13 - 2b^2 + 8b - 13 = 2a^2 - 8a - 2b^2 + 8b$
$= 2(a^2 - b^2) - 8(a - b) = 2(a - b)(a + b) - 8(a - b)$
$= 2(a - b)(a + b - 4)$
On a donc $\boxed{f(a) - f(b) = 2(a - b)(a + b - 4)}$

3. On note a et b deux nombres de $]-\infty; 2]$
tels que $\boxed{a < b}$.
Comme $f(a) - f(b) = 2(a - b)(a + b - 4)$ alors nous allons chercher le signe de $(a - b)$ et de $(a + b - 4)$:
<u>Signe de $a - b$</u> :
<u>Comme $a < b$</u> alors $a - b < 0$ (négatif)
<u>Signe de $a + b - 4$</u> :
<u>Comme $a < 2$ et b</u> ≤ 2 alors $a + b < 4$
donc $a + b - 4 < 0$ (négatif).
<u>Conclusion</u> :
$f(a) - f(b) > 0$ donc $\boxed{f(a) > f(b)}$
Comme il y a un changement d'ordre :
$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$

4. On note a et b deux nombres de $[2; +\infty[$
tels que $\boxed{a < b}$.
Comme $f(a) - f(b) = 2(a - b)(a + b - 4)$ alors nous allons chercher le signe de $(a - b)$ et de $(a + b - 4)$:
<u>Signe de $a - b$</u> :
<u>Comme $a < b$</u> alors $a - b < 0$ (négatif)
<u>Signe de $a + b - 4$</u> :
<u>Comme $a \geq 2$ et b</u> > 2 alors $a + b > 4$
donc $a + b - 4 > 0$ (négatif).
<u>Conclusion</u> :
$f(a) - f(b) < 0$ donc $\boxed{f(a) < f(b)}$
Comme il n'y pas un changement d'ordre :
$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
donc f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$

5. On obtient donc le tableau de variation suivant :
Dressons le tableau de signe de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

Donc $f(2) = 5$ est le mininum de f pour $x = 2$.

6. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 5$ donc $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

Exercice 4 : On note g la fonction $x \mapsto -\dfrac{3}{x+5}$

1. $g(x)$ existe si et seulement si $x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$
donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

2. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$ alors :
$g(a) - g(b) = -\dfrac{3}{a+5} + \dfrac{3}{b+5}$
$= \dfrac{-3(b+5) + 3(a+5)}{(a+5)(b+5)} = \dfrac{-3b - 15 + 3a + 15}{(a+5)(b+5)}$
$= \dfrac{-3b + 3a}{(a+5)(b+5)} = \dfrac{3(a-b)}{(a+5)(b+5)}$
donc $\boxed{g(a) - g(b) = \dfrac{3(a-b)}{(a+5)(b+5)}}$

3. On note a et b deux nombres de $]-\infty; -5[$
tels que $\boxed{a < b}$.
Comme $g(a) - g(b) = \dfrac{3(a-b)}{(a+5)(b+5)}$ alors nous allons chercher le signe de $(a - b)$ de $(a + 5)$ et de $(b + 5)$:
<u>Signe de $a - b$</u> :
<u>Comme $a < b$</u> alors $a - b < 0$ (négatif)
<u>Signe de $a + 5$</u> :
<u>Comme $a < -5$</u> et $a + 5 < 0$ (négatif)
<u>Signe de $b + 5$</u> :
<u>Comme $b < -5$</u> et $b + 5 < 0$ (négatif)
<u>Conclusion</u> :
$g(a) - g(b) < 0$ donc $\boxed{g(a) < g(b)}$
Comme il n'y a pas de changement d'ordre :
$a < b \Rightarrow g(a) < g(b)$
donc g est strictement croissante sur $]-\infty; -5[$

4. On note a et b deux nombres de $[-5; +\infty[$
tels que $\boxed{a < b}$.
Comme $g(a) - g(b) = \dfrac{3(a-b)}{(a+5)(b+5)}$ alors nous allons chercher le signe de $(a - b)$ de $(a + 5)$ et de $(b + 5)$:
<u>Signe de $a - b$</u> :
<u>Comme $a < b$</u> alors $a - b < 0$ (négatif)
<u>Signe de $a + 5$</u> :
<u>Comme $a > -5$</u> et $a + 5 > 0$ (positif)
<u>Signe de $b + 5$</u> :
<u>Comme $b > -5$</u> et $b + 5 > 0$ (positif)
<u>Conclusion</u> :
$g(a) - g(b) < 0$ donc $\boxed{g(a) < g(b)}$
Comme il n'y a pas de changement d'ordre :
$a < b \Rightarrow g(a) < g(b)$
donc g est strictement croissante sur $[-5; +\infty[$

Exercice 5 : On note h la fonction $x \mapsto \sqrt{3 - x}$

1. $h(x)$ existe si et seulement si $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$
donc $D_h =]-\infty; 3]$

2. $\forall a \in]-\infty; 3]$, $\forall b \in]-\infty; 3]$ alors
$h(a) - h(b) = \sqrt{3-a} - \sqrt{3-b} =$
$\dfrac{(\sqrt{3-a} - \sqrt{3-b})(\sqrt{3-a} + \sqrt{3-b})}{\sqrt{3-a} + \sqrt{3-b}}$
$= \dfrac{(\sqrt{3-a})^2 - (\sqrt{3-b})^2}{\sqrt{3-a} + \sqrt{3-b}} = \dfrac{(3-a) - (3-b)}{\sqrt{3-a} + \sqrt{3-b}}$
$= \dfrac{b-a}{\sqrt{3-a} + \sqrt{3-b}}$

3. On note a et b deux nombres de $]-\infty; 3]$ tels que $\boxed{a < b}$
Comme $h(a) - h(b) = \dfrac{b-a}{\sqrt{3-a} + \sqrt{3-b}}$ alors il faut étudier le signe de $b - a$ car $\sqrt{3-a} + \sqrt{3-b} > 0$
<u>Signe de $b - a$</u> :
<u>Comme $a < b$</u> alors $b - a > 0$ (positif)
<u>Conclusion</u> :
$h(a) - h(b) > 0$ donc $\boxed{h(a) > h(b)}$
Comme il y a un changement d'ordre :
$a < b \Rightarrow h(a) > h(b)$
donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; 3]$