Exercice 1 :

On note $A = 9x^2 - 42x + 49 - (14 - 6x)(5x + 3)$

1. A existe pour toutes les valeurs de x donc $E_A = \mathbb{R}$
2. $A = 9x^2 - 42x + 49 - (70x + 42 - 30x^2 - 18x) = 9x^2 - 42x + 49 - 70x - 42 + 30x^2 + 18x = \boxed{39x^2 - 94x + 7}$
3. L'égalité existe pour toutes les valeurs de x donc l'ensemble d'étude est $\mathbb{R}$:
   $(3x - 7)(3x - 7) = 9x^2 - 21x - 21x + 49 = 9x^2 - 42x + 49$
   donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(3x - 7)(3x - 7) = 9x^2 - 42x + 49$
4. $A = (3x - 7)(3x - 7) - 2(7 - 3x)(5x + 3) = (3x - 7)(3x - 7) + 2(3x - 7)(5x + 3)$
   $= (3x - 7)[(3x - 7) + 2(5x + 3)] = (3x - 7)(3x - 7 + 10x + 6) = \boxed{(3x - 7)(13x - 1)}$
5. L'égalité existe pour toutes les valeurs de x donc l'ensemble d'étude est $\mathbb{R}$:
   $A = 39\left[\left(x - \dfrac{47}{39}\right)^2 - \dfrac{1936}{1521}\right] = 39\left[x^2 - \dfrac{94}{39}x + \dfrac{2209}{1521} - \dfrac{1936}{1521}\right]$
   $= 39\left(x^2 - \dfrac{94}{39}x + \dfrac{273}{1521}\right) = 39x^2 - 94x + 7$
   donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $A = 39\left[\left(x - \dfrac{47}{39}\right)^2 - \dfrac{1936}{1521}\right]$
6. $A39\left[\left(\dfrac{47}{39} - \dfrac{47}{39}\right)^2 - \dfrac{1936}{1521}\right] = 39\left[0^2 - \dfrac{1936}{1521}\right] = -39 \times \dfrac{1936}{1521} = \boxed{-\dfrac{1936}{39}}$
7. $A = (3 \times \dfrac{1}{13} - 7)(13 \times \dfrac{1}{13} - 1) = (3 \times \dfrac{1}{13} - 7) \times 0 = \boxed{0}$
8. $A = 39(0)^2 - 92(0) + 7 = \boxed{7}$

Exercice 2 :

1. (a) B existe si et seulement si $5 - 3x \neq 0$ et $2x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{5}{3}$ et $x \neq -\dfrac{3}{2}$
   donc l'ensemble d'étude est $E_B = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{3}\right\}$
   (b) C existe si et seulement si $6 - 12x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$
   donc l'ensemble d'étude est $E_C = \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$
   (c) D existe si et seulement si $16x^2 - 25 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{5}{4}$ et $x \neq -\dfrac{5}{4}$.
   donc $E_D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{4}\right\}$
2. B n'existe pas pour $x = \dfrac{5}{3}$ car $\dfrac{5}{3} \notin E_B$
3. $C = \dfrac{3(0) + 5}{\sqrt{6 - 12(0)}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$
   C n'existe pas pour $x = 0.5$ car $0.5 \notin E_C$
4. $D = \dfrac{1}{16 - 25} = -\dfrac{1}{9}$

Exercice 3 :

1. $E_F = \mathbb{R}$
   $F = 81(2x - 1)^2 - 144 = [9(2x - 1) - 12][9(2x - 1) + 12] = (18x + 3)(18x - 21) = \boxed{9(6x + 1)(6x - 7)}$
2. $E_G = \mathbb{R}$
   $G = (7x - 3)(2x + 3) - (5 - 3x)(6 - 14x) = (7x - 3)(2x + 3) + 2(5 - 3x)(7x - 3)$
   donc $G = (7x - 3)[(2x + 3) + 2(5 - 3x)] = (7x - 3)[2x + 3 + 10 - 6x] = \boxed{(7x - 3)(-4x + 13)}$
3. H existe si et seulement si $4x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$ et $x \neq -\dfrac{3}{2}$ donc $E_H = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right\}$
   $H = \dfrac{2(2x + 3)(5x - 1)}{4x^2 - 9} = \dfrac{2(2x + 3)(5x - 1)}{(2x - 3)(2x + 3)} = \boxed{\dfrac{2(5x - 1)}{2x - 3}}$

4. $E = \mathbb{R}$
   $3(3-2x)(9x-1) = (2x-3)(2x+7)$
   $\Leftrightarrow 3(3-2x)(9x-1) - (2x-3)(2x+7) = 0$
   $\Leftrightarrow 3(3-2x)(9x-1) + (3-2x)(2x+7) = 0$
   $\Leftrightarrow (3-2x)[3(9x-1) + (2x+7)] = 0$
   $\Leftrightarrow (3-2x)(29x+4) = 0$
   $\Leftrightarrow 3-2x = 0$ et $29x+4 = 0$
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ et $x = -\dfrac{4}{29}$
   donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{4}{29}; \dfrac{3}{2}\right\}$
5. $E = \mathbb{R}$
   $(3-2x)(1-2x) = (2x+3)(2x+7)$
   $\Leftrightarrow 3 - 6x - 2x + 4x^2 = 4x^2 + 14x + 6x + 21$
   $\Leftrightarrow 3 - 8x = 20x + 21$
   $\Leftrightarrow -28x = 18$
   $\Leftrightarrow x = -\dfrac{18}{28} = -\dfrac{9}{14}$
   donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{9}{14}\right\}$
   Il y avait une erreur dans l'énoncé!!!
6. $E = \mathbb{R}$
   $5 - 7x^2 = 0$
   $\Leftrightarrow (\sqrt{5} - \sqrt{7}x)(\sqrt{5} + \sqrt{7}x) = 0$
   $\Leftrightarrow \sqrt{5} - \sqrt{7}x = 0$ ou $\sqrt{5} + \sqrt{7}x = 0$
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{35}}{7}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = -\dfrac{\sqrt{35}}{7}$ donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{\sqrt{35}}{7}; \dfrac{\sqrt{35}}{7}\right\}$

Exercice Facultatif :

L'égalité existe si et seulement si $x - 3 \geq 0$ et $\sqrt{x-3} \neq 1$ et $x - 4 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \geq 3$ et $x \neq 4$ et $x \neq 4$
donc l'ensemble d'étude est $E = [3; +\infty[\setminus\{4\}$

$$\frac{1}{\sqrt{x-3}-1} = \frac{(\sqrt{x-3}+1)}{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}$$
$$= \frac{(\sqrt{x-3}+1)}{x-3-1} = \frac{\sqrt{x-3}+1}{x-4}$$