MATHÉMATIQUES

Ce document comporte quatre parties, la première étant consacrée spécifiquement aux contenus de la classe de 3e. En effet, il est apparu souhaitable, pour une meilleure lisibilité, de rassembler dans une deuxième partie des commentaires, illustrés par des exemples, sur « l'outil informatique et l'enseignement des mathématiques », commentaires valables pour l'ensemble du collège. La troisième partie porte sur le traitement des grandeurs usuelles dans l'enseignement au collège, non seulement du point de vue mathématique, mais avec le regard provenant de l'intérêt d'autres disciplines. Enfin, la quatrième partie situe les acquis du collège dans une double perspective, celle de la scolarité obligatoire et celle du lycée.

I – Contenus de la classe de 3e

Le GTD (groupe technique disciplinaire) a été guidé dans l'élaboration des programmes de 3e, comme dans celle des autres programmes du collège, par le souci d'améliorer la progressivité des apprentissages et d'en renforcer la cohérence sans alourdir les contenus. En outre, il convenait que l'ensemble des programmes de collège forme un tout, en se limitant parfois à une première approche de notions en vue d'une poursuite d'études. Le tableau synoptique des programmes du collège est là pour en rendre compte. Dans ces perspectives, on remarquera plus particulièrement :

– les activités inscrites dans le domaine numérique (radicaux, fractions irréductibles, exemples de nombres irrationnels) qui permettent une première synthèse sur les nombres rencontrés au collège ; l'étude des fonctions linéaire et affine qui « récapitulent », en quelque sorte, les aspects de la proportionnalité travaillés tout au long du collège ;

– le travail demandé en géométrie, qui s'inscrit en complément, au moins partiel, de celui engagé précédemment (sur les configurations, les isométries), généralise des résultats antérieurs (situation de Thalès, angle inscrit…), tout en ouvrant un nouveau champ à la mise en œuvre de démonstrations ;

– l'absence de tout travail de conceptualisation sur l'équation de droite et de son utilisation en géométrie analytique, l'un et l'autre réservés au lycée.

Par ailleurs, la place des statistiques dans la vie courante et leur utilisation dans de nombreuses disciplines demandent que la formation du futur citoyen se poursuive en ce domaine : on le fait en abordant le problème de la comparaison de séries statistiques, avec une première approche de la notion de dispersion.

A. Configurations du plan et de l'espace, transformations planes

En géométrie, le champ des configurations dans le plan et dans l'espace est élargi. Les activités de conjecture, d'expérimentation et de démonstration sont poursuivies ainsi que la pratique du dessin des figures aussi bien à main levée qu'à l'aide des instruments de dessin et de mesure, y compris dans un environnement informatique. On continue à entraîner les élèves à élaborer et à rédiger des démonstrations dans l'esprit déjà indiqué dans le document d'accompagnement du cycle central. En 3e cependant, des raisonnements prenant clairement appui sur le principe de non–contradiction sont plus souvent rencontrés et signalés. Dans les démonstrations, les initiatives des élèves sont encouragées. Les propriétés de Thalès et de l'angle inscrit permettent de traiter de nombreux problèmes. Les occasions de lier les domaines géométrique et numérique sont nombreuses ; le travail sur les objets du plan et de l'espace sert de support à des activités de calculs numériques et littéraux ; la manipulation des écritures de quotients permet, par exemple, de démontrer l'alignement des points représentatifs d'une fonction linéaire ou de justifier la construction des points partageant un segment dans un rapport donné sous forme d'un quotient d'entiers.

En géométrie dans l'espace, on travaille, comme les années antérieures, sur des solides et on exploite les images mentales des situations de parallélisme et d'orthogonalité extraites du parallélépipède rectangle, images qui se construisent depuis la classe de 6^e. Le travail proposé sur la sphère et sur les sections planes de solides déjà rencontrés consiste à extraire de ces situations spatiales des figures planes, à les représenter dans leur plan à l'échelle, à effectuer des calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes. En 3^e, d'une part ce travail s'appuie sur diverses perceptions des solides étudiés, permet éventuellement de les renforcer, voire de les construire : ainsi selon que l'on coupe un cylindre par un plan parallèle à l'axe ou par un plan perpendiculaire à l'axe, on peut le percevoir comme engendré par la translation d'un cercle ou par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés. D'autre part, en exploitant le fait qu'une perpendiculaire à un plan en un point est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par ce point, on démontre, avec le théorème de Pythagore, que les sections planes d'une sphère sont des cercles. De même, on démontre, en utilisant de plus la propriété de Thalès, que la section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est une réduction de cette base.

L'étude des transformations du plan se poursuit par celle de la rotation. L'élève aura ainsi à sa disposition en quittant le collège des moyens de repérer les éléments de symétrie et les invariances dans les triangles, quadrilatères, polygones réguliers et une certaine maîtrise de leurs constructions. Les configurations ainsi rencontrées offrent l'occasion, tout au long du collège, d'ouvertures culturelles en liaison avec l'observation de l'environnement naturel, architectural… et le travail entrepris par exemple en arts plastiques. Les activités sur la rotation en 3^e sont conduites dans le même esprit que celui qui a présidé à l'étude des symétries et de la translation les années précédentes. Elles serviront aussi de point d'appui, dans la poursuite des études, au travail sur le cercle trigonométrique et les angles orientés. On pourra remarquer qu'on obtient le même point en tournant de 300° dans un sens ou de 60° dans l'autre sens. L'étude de la succession de deux symétries centrales est l'occasion de faire une autre lecture de la droite des milieux dans un triangle. Ces deux situations permettent, après le passage graduel au cycle central « d'une vision des figures à celle du plan tout entier », de préparer la distinction entre la transformation en tant que telle et des processus de construction. On rejoint implicitement le travail fait dans le domaine fonctionnel avec les transformations d'écritures littérales et les identités.

Le travail effectué antérieurement sur les translations et le parallélogramme conduit naturellement au vecteur. La composée de deux translations conduit à la définition de la somme vectorielle et aux coordonnées. En 3^e, le vecteur perçu à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur est aussi caractérisé par un couple de nombres. Cette conjonction des cadres géométrique et numérique prépare, certes, à la géométrie analytique et à plus long terme l'algèbre linéaire qui ne sont pas abordées au collège ; mais elle permet aussi de conduire avec les élèves une réflexion sur l'emploi des nombres dans le repérage cartésien du plan. Les problèmes d'orientation de la droite rencontrés également dans l'étude des situations de Thalès seront traités ultérieurement à d'autres niveaux avec l'homothétie et le produit d'un vecteur par un réel. L'utilisation de la notation $\vec{u}$ vise à éviter la confusion entre vecteur et segment de droite orienté. Il est intéressant de confronter les désignations du vecteur en mathématiques avec les représentations des forces en physique.

B. Calcul numérique

En 3^e, les élèves affinent leur maîtrise des fractions et abordent les premiers calculs sur les radicaux. Ce travail peut donner lieu à une synthèse intéressante sur les nombres rencontrés depuis le début de leur scolarité.

Dès la classe de 6^e, les élèves ont été amenés à travailler sur des nombres en écriture fractionnaire et en particulier sur des quotients d'entiers. Ils ont ainsi utilisé des nombres (rationnels) exprimés sous diverses formes : forme fractionnaire (réduite ou non) ou forme décimale (limitée ou non) ; ils ont pu constater que certains d'entre eux sont des entiers, d'autres des décimaux non entiers et d'autres encore ni des entiers ni des décimaux.

Les changements d'écriture pour la forme fractionnaire ou les passages de la forme fractionnaire à la forme décimale permettent d'assurer un lien avec la division euclidienne et la division décimale, exacte ou approchée. Les différentes significations de la division (recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts) seront à nouveau mises en évidence en fonction des situations étudiées. À cette occasion, on soulignera les liens entre des écritures comme

$$17 = 5 \times 3 + 2 ; \frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5} ; \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} \cdot$$

Les élèves ont déjà eu l'occasion de simplifier des écritures fractionnaires, mais sans disposer de critères pour déterminer si la fraction obtenue est irréductible ou non. Les problèmes proposés à ce sujet en 3^e sont l'occasion d'enrichir les connaissances des élèves en arithmétique. Après avoir travaillé au cycle central sur les notions de multiples et de diviseurs, il est nécessaire de savoir si deux entiers sont ou non premiers entre eux. Pour l'obtention du PGCD de deux entiers, le programme préconise l'algorithme d'Euclide ou éventuellement un algorithme de différence — la répétition de la transformation qui à un couple d'entiers (a, b) fait correspondre le couple constitué de leur minimum et de leur écart, par exemple qui à (285, 630) fait correspondre (285, 345) — plutôt que le recours à la décomposition en facteurs premiers. Il n'est pas inutile de rappeler que l'arithmétique avait été bannie des programmes de mathématique du collège précisément à cause de l'abus du recours à la décomposition en produit de facteurs premiers. Certes les facteurs premiers de petits nombres, 924 ou 1999 pour donner des exemples, s'obtiennent facilement. Mais il n'en est plus du tout de même pour de plus grands nombres, dont l'ordinateur rend aujourd'hui naturelle la considération. C'est ainsi qu'il sera par exemple beaucoup plus facile d'établir directement que les deux nombres 12345678910111213 et 10000000000000007 ne sont pas premiers entre eux que d'essayer de trouver leur décomposition en facteurs premiers. Certains domaines d'application avancée, tel le chiffrage de messages (cryptage et décryptage), s'appuient largement sur la difficulté pratique d'obtention de certaines décompositions.

Il convient ici de souligner que, dans toutes les activités, la pratique du calcul mental doit être prédominante. Ainsi pour passer de la forme $3+\frac{2}{7}$ à la forme $\frac{23}{7}$, les élèves devraient être capables de fournir la réponse directement, sans passer par la forme $\frac{3}{1}$ pour exprimer le nombre 3 et sans écrire explicitement les deux fractions avec le même dénominateur. De la même façon, la réduction d'une écriture comme $\frac{36}{48}$ doit pouvoir être réalisée rapidement (en une ou deux étapes) sans recourir à des décompositions explicites de 36 et 48 en facteurs premiers, ni à un algorithme pour calculer le PGCD de deux nombres : l'utilisation consciente de la seule égalité $\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}$ (éventuellement plusieurs fois) est suffisante.

La synthèse sur les nombres rencontrés au collège permet par ailleurs de donner un nouvel éclairage sur les nombres rationnels, en mettant en évidence le fait que tous les nombres ne sont pas rationnels. Le nombre π en est bien sûr un exemple, mais ce sont surtout les nombres qui ne peuvent pas être exprimés exactement autrement qu'en utilisant le symbole $\sqrt{\ }$ (lettre r stylisée) qui en sont la meilleure illustration. Il est donc intéressant de faire prendre conscience aux élèves de toute la richesse, tant théorique que pratique, à laquelle peut conduire une réflexion sur un objet tel que $\sqrt{2}$: longueur de la diagonale du carré unité ou côté du carré d'aire double. L'utilisation d'un symbole particulier (presque un *nom propre*) laisse à penser que les écritures antérieures ne suffisaient pas. Sa découverte constitue un des premiers succès historiques des mathématiques. Une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ pourra, dans cette optique, éventuellement être envisagée. Le théorème de Pythagore, vu en classe de 4e, est pour le concept de racine carrée une bonne opportunité de mettre en œuvre le principe d'appuis mutuels entre différentes parties du programme.

C. Calcul littéral

Comme il est indiqué dans le document d'accompagnement du cycle central, l'acquisition de techniques de calcul faisant appel à des lettres est un des points délicats de l'enseignement des mathématiques. Les apprentissages, très progressifs et en continuité avec ceux développés dans les classes antérieures, s'appuient sur la résolution de nombreux problèmes, laquelle nécessite l'emploi de lettres pour désigner des inconnues, des indéterminées ou des variables. La pratique des tests sur les égalités et inégalités aide à comprendre ce qu'est une identité et ce que signifient les expressions : résoudre une équation, résoudre une inéquation, en déterminer la ou les solutions. On poursuit le travail sur la transformation d'écritures telles que $\frac{4}{3}(x+3)$, $2\times\frac{x}{3}$.

En 3e, le champ des problèmes nécessitant la résolution d'une équation du premier degré se prolonge à ceux qui conduisent à :

– la résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques, après qu'a été dégagé le lien entre l'ordre et la multiplication,

– la résolution d'une équation mise sous la forme $A.B=0$, où A et B désignent deux expressions du premier degré,

– la résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Dans chaque cas, la géométrie, la gestion de données, les autres disciplines et la vie courante fournissent de nombreux exemples. On sera attentif à l'interprétation des résultats obtenus, en les replaçant dans le contexte envisagé.

L'étude systématique des différentes méthodes de résolution algébrique d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues n'est pas un objectif du programme. L'idée à dégager est celle de se ramener à la résolution d'équations à une seule inconnue.

D. Fonctions

Jusqu'à la fin du cycle central, la notion de fonction n'a été utilisée que de manière implicite. Les transformations géométriques étudiées n'ont pas été présentées comme application du plan dans lui-même. Le travail sur la proportionnalité, et plus largement sur l'étude de relations entre données numériques, a permis d'utiliser des formules, des tableaux de nombres et des représentations dans le plan muni d'un repère, en particulier comme outils pour résoudre des problèmes. Ainsi, à l'occasion du traitement de situations numériques ou géométriques, les élèves ont été amenés à passer d'un langage à un autre (par exemple, d'une formule ou d'un graphique à un tableau de nombres). Mais, si des expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » ont été utilisées, les fonctions numériques associées à ces formules, à ces tableaux ou à ces représentations n'ont pas été explicitées.

La classe de 3e est donc l'occasion du premier véritable contact des élèves avec cette notion de fonction, dans sa conception actuelle qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. Mais il ne s'agit pas de donner une définition générale de la notion de fonction. Le travail est limité à l'étude de fonctions particulières : les fonctions linéaires et affines. D'autres exemples de fonctions simples seront également utilisés, en particulier pour montrer que toute représentation graphique ne se réduit pas à un ensemble de points alignés (par exemple, en représentant quelques points d'une fonction telle que $x \to x^2$, sur un intervalle). Au lycée, la notion de fonction occupera une place centrale, dans le cadre de l'enseignement de l'analyse.

La notion de fonction linéaire permet, en 3e, d'opérer une synthèse des différents aspects de la proportionnalité rencontrés tout au long du collège et de les exprimer dans un nouveau langage. Toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire. Dans cette perspective, il convient d'être attentif, avec les élèves, aux questions soulevées par le domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée, en ayant soin de préciser, chaque fois, le domaine de signification de la fonction (définie, elle, sur l'ensemble des réels) dans le contexte de la situation traitée (qui impose souvent une restriction à un intervalle ou à un nombre fini de valeurs).

La fonction linéaire doit apparaître comme un cas particulier de la fonction affine, cette dernière étant associée à la proportionnalité des accroissements.

L'apprentissage des langages permettant de traduire les relations fonctionnelles doit faire l'objet d'une attention toute particulière. La notation $x \rightarrow ax$ ne sera introduite que pour des valeurs particulières de a, en liaison avec le coefficient de proportionnalité et d'expressions verbales du type « Pour passer d'un nombre à son image, je multiplie par a ». La notation $f(x)$ est également introduite pour des valeurs particulières de la variable (du type $f(2)$, $f(-3)$,…), mais on veillera à différencier avec les élèves le statut des parenthèses dans ce type de notation de leur signification dans un calcul algébrique. Les notations fonctionnelles amènent à utiliser des lettres avec une nouvelle signification : successivement, au collège, les lettres ont ainsi été utilisées de façon « expressive » en référence à des grandeurs (comme dans la formule de l'aire du rectangle), pour désigner des valeurs inconnues (dans les équations), des valeurs indéterminées (dans les identités remarquables, par exemple) et enfin des variables (dans le langage des fonctions). Les difficultés à comprendre le statut différent des lettres, et du signe =, dans ces différents contextes justifient le fait que la notion d'équation de droite ne soit pas abordée au collège.
Le travail sur des situations modélisables par des fonctions classiques est l'occasion de formuler un même problème dans différents cadres et d'habituer les élèves à passer d'un cadre à l'autre, pour interpréter des résultats ou des propriétés : formules, tableaux de nombres, fonctions, représentations graphiques. C'est en particulier ce qui permettra d'utiliser une représentation graphique pour la résolution d'un système d'équations à deux inconnues.

E. Représentation et organisation de données ; statistiques

Le contenu et les commentaires du programme concernant la statistique constituent un prolongement de ceux des classes antérieures, l'objectif de l'enseignement de statistique descriptive au collège étant indiqué dans le document d'accompagnement des programmes du cycle central.
En classe de 3^e, il s'agit d'aider les élèves à franchir une nouvelle étape dans le développement de leur autonomie de jugement à propos d'informations qui peuvent être nombreuses. Dans le cas d'un regroupement en classes, les choix effectués peuvent avoir des effets sur les résultats numériques ou les représentations graphiques et leurs interprétations.
En classe de 4^e, on a pu observer que « la moyenne d'une population dont les éléments sont rangés par ordre croissant ne sépare pas ceux-ci, en général, en deux parties de même effectif », ce qui justifie l'introduction de la médiane en classe de 3^e. Les élèves disposent alors de deux indicateurs de la tendance centrale d'une population, leur position relative pouvant faire l'objet d'une interprétation dans des situations appropriées.
La nécessité de distinguer deux séries statistiques de même tendance centrale justifie l'intérêt de la notion de dispersion. Dans ce premier contact, le programme se limite à l'étendue d'une série statistique ou à l'étendue d'une partie donnée de celle-ci ; cela permet, sans difficulté technique, de familiariser les élèves avec une démarche habituelle en statistique : procéder à une synthèse de l'information sous la forme de nombres mesurant respectivement la position et la dispersion de la série étudiée.
Choix de la représentation d'une série statistique, interprétation des résultats obtenus et comparaison de deux séries statistiques peuvent être conduits, sans répétitions inutiles ni pertes de temps, en utilisant des tableurs-grapheurs ou en répartissant le travail au sein de la classe. De plus, outre son intérêt spécifique, l'enseignement des statistiques contribue au développement des compétences en mathématiques, notamment celles liées au calcul et à la construction, la lecture et l'utilisation de graphiques ; toutes les capacités correspondantes peuvent être mises en œuvre au cours d'activités interdisciplinaires.

II – L'outil informatique et l'enseignement des mathématiques au collège

– L'évolution de l'informatique (qualité des logiciels, facilité d'utilisation, abaissement des coûts,…) en favorise grandement l'emploi dans les collèges. La pratique, de plus en plus répandue, de l'informatique en montre les richesses d'application, en particulier l'aide qu'elle peut apporter aux apprentissages. En même temps, en liaison avec les autres disciplines, les mathématiques apportent une contribution spécifique à l'utilisation de l'informatique. Des connaissances mathématiques sont indispensables non seulement pour effectuer, mais aussi pour choisir avec discernement les traitements appropriés, par exemple en statistiques avec les tableurs-grapheurs.
– L'apprentissage des mathématiques ne peut se construire sur une acquisition purement formelle de définitions et de résultats, de techniques et d'algorithmes. C'est en donnant sens à ces connaissances, en les construisant à propos de nombreuses situations et problèmes à résoudre que l'élève va les rendre opératoires et par là se les approprier. Or, d'une part les calculatrices et les logiciels offrent toujours davantage de possibilités d'expérimentation tant dans le domaine géométrique que dans le domaine numérique ou dans celui de gestion des données. D'autre part, l'informatique fait et fera de plus en plus partie de l'environnement des élèves. Ainsi l'enseignement des mathématiques peut, dans ce cadre, utiliser avec profit des expérimentations diverses sur les objets qu'elles étudient comme les nombres ou les figures géométriques, et donc contribuer à la formation scientifique des élèves. Les calculatrices sont précieuses pour réaliser des explorations nombreuses dans le domaine numérique. Par exemple, déterminer par approximations successives à l'aide d'une calculatrice, des valeurs approchées de la racine carrée d'un nombre ou plus généralement d'une solution d'une équation, constitue une expérimentation où le calcul est conduit sous le contrôle d'un raisonnement bâti sur le concept même de racine carrée ou de solution d'une équation. Les logiciels de géométrie permettent de

varier « à l'infini » les cas de figure dans une situation donnée. Par exemple, la construction de plusieurs figures dans le cas où l'on compose des symétries centrales permet de reconnaître visuellement des parallélismes, ce qui conduit à conjecturer le résultat. La mise en œuvre de propriétés comme celle des milieux des côtés d'un triangle permet une démonstration qui prendra du sens pour l'élève à travers ses expériences de constructions préalables.

A. Le calcul

Dans les classes antérieures à la 3e, le calcul numérique était le point de départ pour le calcul littéral, puis devenait en quelque sorte sa matière première. Par exemple, on apprenait à distinguer une identité et une équation grâce à la substitution de valeurs numériques aux lettres représentant des variables. En classe de 3e, une modification de caractère fondamental s'introduit avec l'imbrication totale du calcul numérique et du calcul littéral. C'est, par exemple, du traitement des variables que l'on s'inspire pour les calculs mettant en jeu des racines carrées. Autrefois, les machines ne permettaient que du calcul approché dans certains cas (fractions non décimales, radicaux par exemple), mais aujourd'hui, les logiciels de calcul formel sont accessibles désormais aux collégiens dans certaines calculatrices de poche. Pourvu que l'on ait bien choisi l'écriture à utiliser pour les nombres, ce que l'on appelle encore leur *format*, on peut par exemple obtenir en lecture directe de l'affichage d'une calculatrice une égalité du genre : $\frac{1}{666} - \frac{1}{999} = \frac{1}{1998}$.
L'emploi des logiciels désignés par l'une des appellations *calcul symbolique* ou *calcul formel* donne aux opérations que l'on est amené à effectuer un caractère extrêmement concret, ce qui intéresse beaucoup d'élèves, mais aussi très contraignant, ce qui pourrait être décourageant pour un élève trop livré à lui-même. Les exemples fourmillent, à commencer par tous ceux qu'il convient de mettre en rapport avec les *formats* possibles des nombres. Que l'on explore par exemple, si on n'en a pas encore eu l'occasion, les mêmes calculs sur des racines carrées effectués par un logiciel de calcul formel, selon qu'on lui aura demandé du calcul exact ou du calcul approché (on peut pour cela puiser des idées à partir des exemples mêmes du programme, ainsi : $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ peut conduire à une variété importante de calculs ayant valeur de tests).
Les ordinateurs conduisent encore à élargir le domaine de l'expérimentation. Nous verrons que c'est bien sûr le cas pour les logiciels de constructions géométriques, mais c'est aussi le cas pour les tableurs, qui permettent à la fois de manipuler des expressions algébriques, de remplacer les variables par des valeurs et d'entreprendre, en conservant les résultats et les formules, un grand nombre de calculs liés à des expressions algébriques. À la demande, ils peuvent ensuite fournir rapidement des représentations graphiques variées. La fréquentation des formules, leur construction, leur utilisation et leur analyse rendent possible une approche nouvelle de l'apprentissage de l'algèbre. Ils constituent aussi un outil rapide d'exploration des statistiques, permettant l'analyse des données sans que la charge de calcul devienne un obstacle insurmontable. Enfin la mise en œuvre, dans un tableur, d'algorithmes comme celui d'Euclide permet la mise en place d'une réflexion particulière sur les automatismes de calculs qu'une machine peut prendre en charge.

B. Les fonctions

La notion de fonction émerge en classe de 3e seulement, avec la modélisation des situations de proportionnalité, mais l'*outil mathématique fonction* a déjà été manipulé. Ainsi l'étude des rapports trigonométriques a conduit très naturellement à utiliser des touches de fonction d'une calculatrice scientifique ; on a également eu recours à la touche $\sqrt{\ }$.
L'*outil mathématique fonction* contribue à la mise en place du concept de variable. À côté des situations traditionnelles, le tableur permet l'approche d'une variable par un ensemble de valeurs, celles par exemple que l'on peut apercevoir dans une colonne de feuille de calcul. Sous forme de formules recopiées dans le tableau de gauche, de valeurs numériques arrondies dans le tableau de droite, voici l'application à l'obtention de l'aire d'un disque dont on fait varier le rayon de 0 à 1 par pas de 0,2.

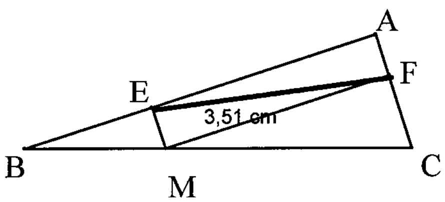
Rayon	Aire	Rayon	Aire
0	=PI ()*A2*A2	0,0	0,0000
=A2+0,2	=PI ()*A3*A3	0,2	0,1257
=A3+0,2	=PI ()*A4*A4	0,4	0,5027
=A4+0,2	=PI ()*A5*A5	0,6	1,1310
=A5+0,2	=PI ()*A6*A6	0,8	2,0106
=A6+0,2	=PI ()*A7*A7	1,0	3,1416

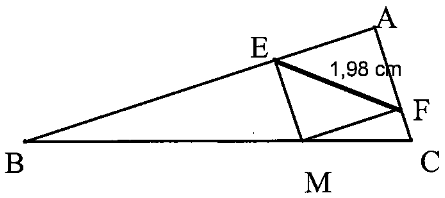
Le programme et la première partie du présent texte ont cité des algorithmes numériques, tels celui d'Euclide ou celui des différences successives pour l'obtention du plus grand diviseur commun à deux nombres entiers. L'écriture et la mise en œuvre d'un algorithme font appel à des notions fonctionnelles d'une manière qui constitue une ouverture par rapport à la seule utilisation de notations du type $f(x)$. C'est ainsi par exemple que l'on pourra rencontrer l'idée de transformation dans un contexte autre que géométrique.

C. Les constructions géométriques

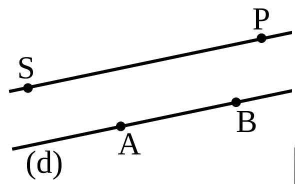
Les logiciels de construction géométrique permettent la mise en évidence de relations entre les éléments d'une figure ; elles doivent être explicitées par l'élève pour la dessiner. Ces logiciels permettent notamment d'observer une figure sans la reconstruire, lorsque l'on déplace par exemple un de ses points, afin de repérer des propriétés conservées et d'énoncer des conjectures. Ils constituent un moyen puissant d'exploration des figures, facilitent l'observation des propriétés (alignement, conservation de directions, concours de droites, etc.).
Leur utilisation en collège présente deux caractéristiques particulièrement intéressantes. La première est l'explicitation des propriétés mises en œuvre pour les constructions, par exemple, construire un triangle ABC rectangle en A à partir de son hypoténuse, conduit à utiliser la propriété de l'angle droit dans un demi-cercle, en construisant successivement le milieu de [BC], le cercle de diamètre [BC] et un point quelconque de ce cercle. La deuxième a trait à l'expérience graphique que font les élèves en observant une figure dont on

déplace des éléments variables. Des propriétés apparaissent et provoquent des questions qui motivent et préparent à la démonstration.
Ce type de logiciel permet la mise en place de situations qui pourraient paraître complexes, mais auxquelles la dynamique de la figure permet de donner du sens. En voici un exemple que l'on peut traiter en classe de 3e :





ABC est un triangle rectangle en A, et M un point de l'hypoténuse [BC]. Les perpendiculaires à [AB] et [AC] passant par M coupent [AB] en E et [AC] en F.
Où placer M pour que la distance EF soit la plus petite possible ?
Une fois la construction réalisée, le logiciel permet d'afficher la distance EF qui varie quand on déplace M sur [BC], on peut facilement invalider les conjectures qui apparaissent fréquemment sur papier (le milieu ou les points B et C). Si le triangle ABC construit par l'élève est trop particulier, on peut le déformer (tout en le conservant rectangle). Le logiciel permet à l'élève d'observer que le point M peut être placé n'importe où sur [BC], que son déplacement modifie la longueur EF et ainsi de comprendre le problème posé. En déplaçant M l'élève peut aussi observer les invariants de la figure (ici que le quadrilatère MEAF est toujours un rectangle). L'observation du rectangle conduit à la solution (le pied de la hauteur) et à la démonstration.
Certains logiciels permettent de choisir les outils fournis à l'élève, en limitant les commandes mises à sa disposition. En voici un exemple :
On donne une droite (d) et un point P quelconque, on limite les outils disponibles à « droite », « point » et « symétrie centrale ». On demande la construction d'une droite parallèle à (d) passant par P.



un menu réduit

Pour cela on peut procéder ainsi : on construit deux points quelconques A et B de la droite (d). La construction successive de R, image de P dans la symétrie de centre B et de S symétrique de R par rapport à A donne le point S. La droite (SP) est la parallèle cherchée. Cette construction est validée par la propriété des milieux.
Dans ce type de problème, un choix judicieux des outils disponibles (éventuellement complexes) conduit à mettre en œuvre dans une construction, puis dans sa justification, les propriétés au programme des classes du collège.

III – Place des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques au collège

Les programmes du collège, tout comme ceux de l'école, insistent sur l'importance de la résolution de problèmes pour la compréhension progressive par les élèves des notions mathématiques et une maîtrise de celles-ci qui ne se réduit pas à la seule mémorisation de techniques. Ils peuvent ainsi recourir à l'outil qu'elles constituent dans différentes situations. Par cela, on rejoint l'histoire des mathématiques.

A. Les enjeux du travail sur les grandeurs

Aujourd'hui, la science mathématique s'est largement affranchie de la question des grandeurs (l'ensemble des nombres, par exemple, se construit, formellement, sans référence aucune aux grandeurs). Théoriquement, les mathématiques peuvent donc à la fois se transmettre et se développer sans référence à la notion de grandeur.
Sans cette référence, la présentation des mathématiques serait toutefois beaucoup trop abstraite pour être à la portée des élèves du collège, et même bien au-delà. Il y a d'ailleurs plusieurs raisons qui rendent indispensable, spécialement dans l'enseignement obligatoire, un appui résolu, mais distancié, sur les notions de grandeurs et de mesure.
– Historiquement, c'est bien à partir d'un travail sur les grandeurs qu'ont été construits la plupart des concepts et des théories mathématiques. Il serait d'autant plus dommageable de perdre de vue cette filiation que, comme cela a été signalé, c'est elle qui permet d'assurer les liens avec les autres disciplines.
– S'il a été possible aux mathématiques de s'émanciper de la notion de grandeur, c'est sans doute qu'elles avaient accumulé quantité d'expériences et de résultats dont il ne semble pas que l'enseignement de base puisse faire l'économie.
– C'est dans des situations mettant en jeu des grandeurs que tous les élèves pourront réinvestir les connaissances acquises en mathématiques. Les mathématiques du citoyen sont celles qui interviennent comme outils pour les grandeurs, celles qui permettent de modéliser efficacement des situations faisant intervenir des grandeurs.

B. Les grandeurs et les programmes du collège

Les problèmes proposés et les situations étudiées sont souvent empruntés à la vie courante. Il y est question de terrains et de clôture, de volumes de gaz ou de liquide, de vitesse, de débits, de mélanges… Il y est aussi question de prix et de coûts, de pourcentages et de l'application de pourcentages à des grandeurs. Depuis l'école, on est passé progressivement de situations de comparaison de grandeurs (qui sont des abstractions à partir de caractéristiques d'objets de la vie courante), puis de mesurage, au travail sur les mesures, c'est-à-dire sur les nombres. En effet, en mathématiques, on ne travaille pas *sur* les grandeurs (c'est l'objet d'autres disciplines, comme la physique, la technologie, les sciences de la vie et de la Terre ou la géographie et l'économie par exemple), mais *avec* les grandeurs ou *à partir* d'elles ; ici se situe l'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines. Une exception : longueurs, aires ou volumes sont des grandeurs appartenant au champ mathématique, tandis que la mise en évidence de l'aspect multidimensionnel des deux dernières correspond à un travail *sur* des grandeurs. Le travail sur longueurs et aires est indispensable pour présenter aux élèves les nombres non entiers et les opérations étudiés au collège.

Les élèves ont eu l'occasion de prendre conscience petit à petit, au long du collège, de la nature de l'activité mathématique et des mathématiques, en particulier avec la construction de modèles de certaines situations, notamment celles de la proportionnalité. Ils acquièrent également des techniques élémentaires de traitement et de résolution, qui ont des utilisations très diverses au quotidien, dans les autres disciplines et dans la vie du citoyen.

Lors de ces traitements, on opère parfois sur une seule grandeur, parfois on privilégie la relation entre des grandeurs. Un problème peut concerner des grandeurs de même nature, voire une seule grandeur, ou des grandeurs de natures différentes ; ces caractéristiques, ainsi que la nature des relations entre les grandeurs en cause, induisent une difficulté plus ou moins grande lors de la résolution et déterminent souvent le choix de telle ou telle procédure par les élèves. On a ainsi l'occasion de travailler avec des grandeurs et des unités de différents types ; il peut s'agir de grandeurs « simples » (objets de mesures directes) et unités « simples », de grandeurs et unités produits (passagers x km, kWh,…), quotients (m / s, km / h,…,), ou encore de grandeurs et unités « composées » ($m^3 \times s^{-1}$,…). Cependant, certains traitements conduisent à utiliser des nombres sans dimension ; ils correspondent à des relations de type échelle, agrandissement, pourcentage, fréquence… et concernent une seule grandeur ou des grandeurs de même nature.

Quant à la modélisation d'une situation de la vie courante, par exemple par un système d'équations (dans R dès la classe de 4e, ou R^2 en classe de 3e), elle correspond au passage du cadre des grandeurs au cadre numérique. Ce type de passage, ainsi que le retour au cadre et à la situation de départ, présentent des difficultés importantes pour les élèves, difficultés que la diversité et le choix des situations proposées, la diversité aussi des procédures mises en œuvre, aident à surmonter progressivement.

En mathématiques, on travaille non dans le domaine des grandeurs mais dans celui des nombres. L'activité pratique de mesurage en physique ou technologie est inséparable de la notion d'erreur ; elle est distincte de celle d'attribution d'une mesure exacte. La distinction entre « mesure exacte » (qui est telle parce que la grandeur est discrète ou parce qu'on en a décidé ainsi) et « mesure approchée » est une question très difficile ; le travail mené en mathématiques au long du collège sur calcul exact et calcul approché peut en favoriser l'approche ; le programme de la classe de 3e en offre une nouvelle occasion avec le travail suggéré sur le nombre $\sqrt{2}$.

Il s'agit bien là d'initiation à la démarche scientifique.

IV – Au terme du collège

Les programmes des quatre années ont été conçus pour permettre une véritable activité mathématique de l'élève, par la résolution de problèmes. Les objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège ont été décrits en tête de ceux de 6e :

– *développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive ;*
– *stimuler l'imagination ;*
– *habituer l'élève à s'exprimer clairement aussi bien à l'écrit qu'à l'oral ;*
– *affermir les qualités d'ordre et de soin.*

Ces objectifs sont visés au travers d'activités qui permettent en même temps l'acquisition de connaissances mathématiques.

La liberté du professeur dans l'organisation de son enseignement, qui est rappelée pour chaque programme avant l'explicitation des contenus, d'une part permet l'adaptation à la diversité des situations et d'autre part favorise la contribution de chacun des membres de l'équipe pédagogique à la construction du projet personnel de chaque élève. La phrase du préambule du programme de 6e, « il est essentiel que les connaissances prennent du sens pour l'élève à partir de questions qu'il se pose », concerne tous les élèves ; elle vaut tout particulièrement pour des élèves « en difficulté », chez lesquels la réduction des apprentissages mathématiques à l'acquisition d'automatismes ne fait qu'accentuer blocages, rejets et perte de sens de l'école. Il importe donc que la nature fondamentale de l'activité proposée soit la même pour tous, bien qu'elle s'appuie sur des acquis différents et qu'elle relève de complexités différentes.

A. La formation générale

En mathématiques, comme dans d'autres disciplines, les élèves ont eu tout au long du collège l'occasion de pratiquer une démarche scientifique : conjecture et expérimentation sur des exemples, recherche de contre-exemples ou construction d'une argumentation, contrôle des résultats et évaluation de leur pertinence en fonction du problème étudié, analyse critique. Les élèves y développent des qualités d'initiative, d'imagination et de créativité, en même temps qu'ils font l'apprentissage de la rigueur et de la recherche de preuves, d'écoute des arguments d'autrui et d'analyse critique.

Ils ont rencontré et ont eu l'occasion d'élaborer, au cours de démonstrations, différents types de raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement par disjonction des cas lors de l'examen de l'effet de la multiplication sur l'ordre, infirmation par mise en évidence d'un contre-exemple, approche du raisonnement par l'absurde lorsqu'il s'agit de reconnaître si une configuration est une configuration de Thalès ou si un triangle est rectangle.

Ils ont été amenés à acquérir des méthodes qui sont efficaces aussi bien pour améliorer la compréhension de phénomènes que pour aider à agir : les outils de représentation de toute nature (figures, graphiques, tableaux, mais aussi expressions littérales et symboles) sont autant d'objets sur lesquels s'exerce l'activité mathématique. La modélisation permet notamment d'appréhender des situations et d'anticiper sur les évolutions. Les formes d'expression, autres que la langue usuelle, se sont enrichies de tous ces outils.

Ils ont également été familiarisés avec l'utilisation raisonnée d'une calculatrice (contrôle des manipulations de celle-ci au moyen de l'ordre de grandeur du résultat, maîtrise des priorités opératoires, signification des chiffres affichés à l'écran), voire d'un ordinateur.

Les compétences exigibles sont énoncées en termes de savoirs et savoir-faire mathématiques. Les activités proposées visent à les acquérir mais, en même temps, elles développent des capacités mathématiques plus générales ainsi que des compétences communes à l'ensemble des disciplines, mises en œuvre dans chacune de celles-ci sous des formes appropriées.

Repérer explicitement de telles compétences au travers des activités contribue à la cohérence des apprentissages et va à l'encontre du risque d'éclatement des savoirs. Cette explicitation ne peut que gagner à être définie en commun avec les collègues d'une même classe et être faite avec les élèves au fur et à mesure des travaux effectués.

Citons, à titre d'exemples parmi les compétences évaluées en début de 2$^{\text{nde}}$ générale et technique ou professionnelle : recenser des informations ; regrouper, ranger ou mettre en relation des éléments en fonction de critères donnés ; décider d'une méthode, la mettre en œuvre ; exécuter une consigne ; justifier un résultat, le rejeter ou l'accepter ; prendre une décision à partir de résultats obtenus ; présenter un résultat sous la forme demandée, avec soin et lisibilité, en cohérence avec le problème posé, en rédiger correctement la formulation.

Au terme d'un exercice, amener l'élève à en dégager l'intérêt — le type de problème qui a été résolu, le résultat qui a été établi —, à situer l'exercice dans la progression du cours, et plus généralement dans l'ensemble des connaissances acquises au collège, est particulièrement formateur : cela permet d'avoir une vision globale des questions abordées en mathématiques et dans certains cas de leurs liens avec d'autres disciplines. Ainsi l'enseignement des mathématiques contribue pour une bonne part à la formation générale des collégiens et à leur formation de futur citoyen.

B. Les contenus mathématiques

Techniques de calcul sur les nombres en écriture décimale ou fractionnaire ainsi que sur des expressions littérales, détermination par calcul mental de l'ordre de grandeur d'un résultat, calculs mettant en œuvre des pourcentages, lecture et utilisation de représentations de données et graphiques, constructions en géométrie, reconnaissance des effets des transformations fréquemment utilisées en art ou en architecture ou familiarisation avec la représentation des objets de l'espace et les conventions usuelles ainsi que le traitement de ces représentations… sont autant d'outils précieux dans la vie courante, la scolarité ultérieure et la future vie professionnelle du collégien. La proportionnalité, rencontrée dès l'école, est, en particulier, un concept non seulement essentiel dans la vie du citoyen, mais encore fondamental pour l'étude et la compréhension des relations entre les grandeurs physiques.

Pour être mobilisables, de telles connaissances ont dû être introduites, tout au long du collège, dans des situations où elles trouvaient leur raison d'être, situations issues des mathématiques, des autres disciplines ou de la vie courante, et dont la multiplicité a permis l'émergence.

C. Les prolongements en lycée d'enseignement général et technologique et en lycée professionnel

La plupart des élèves poursuivent leurs études en lycée d'enseignement général et technologique ou en lycée professionnel. Une bonne articulation entre le collège et la 2$^{\text{nde}}$ constitue donc un enjeu capital.

Les objectifs essentiels — entraîner les élèves à l'activité scientifique et promouvoir l'acquisition de méthodes, développer les capacités de communication (qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite) — s'inscrivent en droite ligne de ceux du collège.

Les compétences en cours d'acquisition au collège sont évaluées en début de 2$^{\text{nde}}$ en vue d'être développées et approfondies tout au long du lycée. Les contenus sont dans la continuité de ceux du collège :

– la résolution de problèmes constitue toujours l'objectif fondamental des activités numériques et algébriques. On s'attache à dégager sur les exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats ;

– l'introduction de l'analyse au lycée se fait à partir de situations telles que : tracés graphiques, touches de la calculatrice, algorithmes de calcul, relations de dépendance issues de la géométrie, de la mécanique, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale. L'étude des variations de longueurs, d'aires ou de volumes ainsi que celles des fonctions linéaires et affines en lien avec la proportionnalité faites au collège préparent bien à ces démarches ;

– le travail sur les inégalités prend en compte celui qui a été fait sur l'ordre et les opérations. La distance de deux points sur un axe fonde les concepts de valeur absolue et d'intervalle. La pratique des opérations sur les nombres ainsi que celle des troncatures et des arrondis se poursuivent ;
– l'enseignement des statistiques fait au collège trouve au lycée, suivant les séries, plusieurs prolongements : la dispersion, avec l'introduction de l'écart-type, l'étude de séries statistiques à deux variables et l'introduction de probabilités à partir de la notion de fréquence ;
– la géométrie est, dans certaines séries, un champ d'étude important. En géométrie plane, on approfondit la connaissance et l'emploi d'outils introduits à des degrés divers au collège, tels que : configurations, transformations, calculs dans un repère adapté, calcul vectoriel. La géométrie dans l'espace s'appuie sur celle pratiquée en collège.